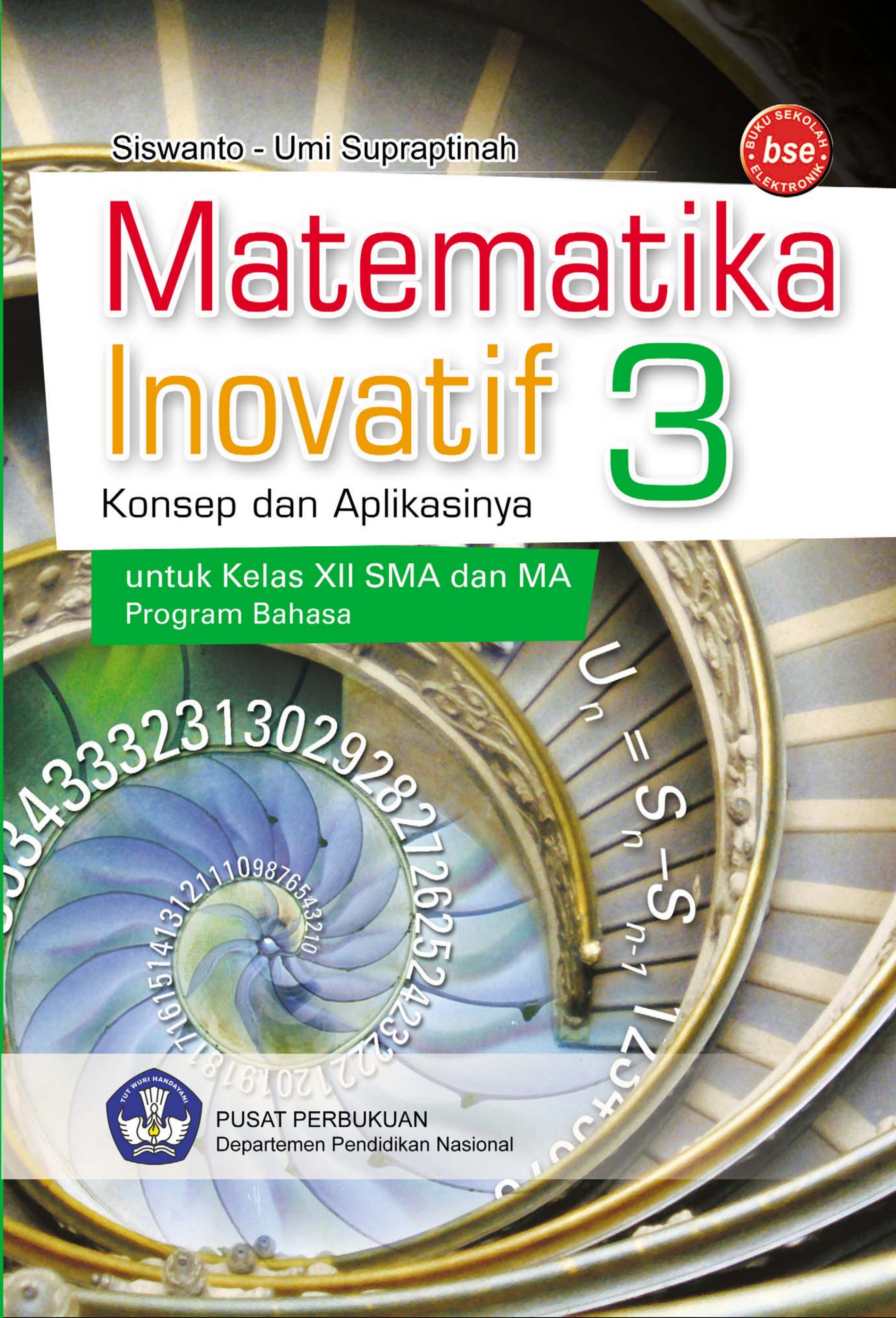
Siswanto - Umi Supraptinah

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Matematika Inovatif 3

Konsep dan Aplikasinya

untuk Kelas XII SMA dan MA
Program Bahasa



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Inovatif Konsep dan Aplikasinya 3 untuk Kelas XII SMA dan MA Program Bahasa

Siswanto - Umi Supraptinah

MATEMATIKA INOVATIF 3

Konsep dan Aplikasinya

untuk Kelas XII SMA dan MA

Program Bahasa

Siswanto

Umi Supraptinah

PUSAT PERBUKUAN

Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Inovatif 3

Konsep dan Aplikasinya
untuk SMA dan MA Kelas XII
Program Bahasa

Penulis	: Siswanto Umi Supraptinah
Editor	: Suwardi
Desain kulit	: Agung Wibawanto
Desain tata letak isi	: Agung Wibawanto
Penata letak isi	: Mulyadi
Ilustrator	: Sartana
Ukuran Buku	: 17,6 x 25,0 cm

510.07
SIS SISWANTO
m
Matematika Inovatif 3 : Konsep dan Aplikasinya untuk Kelas XII SMA dan MA Program Bahasa / penulis, Siswanto, Umi Supraptinah ;editor, Suwardi; ilustrator, Sartana. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
vi, 146 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 143
Indeks : hlm. 145
ISBN 978-979-068-864-3 (no. jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-869-8

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Umi Supraptinah III. Suwardi IV. Sartana

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009.

Diperbanyak oleh . . .

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Prakata

Selamat, kalian telah naik ke kelas XII Program Bahasa. Tentunya hal ini menjadi kebanggaan tersendiri bagi kalian. Semoga kalian terpacu untuk berpikir lebih dewasa lagi. Meskipun sudah naik ke kelas XII, kalian tidak boleh lengah dan bersantai-santai. Ingat, tantangan yang akan kalian hadapi di kelas ini tidaklah ringan. Sebentar lagi kalian akan menghadapi ujian nasional. Apalagi bagi kalian yang akan melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi. Tentunya kalian akan mempersiapkan diri mengikuti ujian masuk ke perguruan tinggi favorit. Kalian harus tetap menjaga semangat agar cita-cita kalian tercapai. Buku ini akan membantu kalian mewujudkan cita-cita kalian.

Buku ini disusun dengan urutan penyajian sedemikian rupa sehingga kalian akan merasa senang untuk mendalaminya. Dalam pembelajarannya, buku ini menuntut kalian untuk aktif dan bertindak sebagai subjek pembelajaran. Kalian dituntut untuk mengonstruksi, mengeksplorasi, dan menemukan sendiri konsep-konsep matematika sehingga kalian betul-betul kompeten secara matang, khususnya di bidang matematika.

Di kelas XII Program Bahasa ini, kalian akan mempelajari materi-materi berikut:

- Program Linear
- Matriks
- Barisan dan Deret

Penulis berharap semoga buku ini dapat membantu kalian dalam mempelajari konsep-konsep matematika. Akhirnya, semoga kalian berhasil dan sukses.

Solo, Februari 2008

Penulis

Daftar Isi

Bab I

Program Linear

Sumber: *Ensiklopedia Pelajar,* 1999

Motivasi

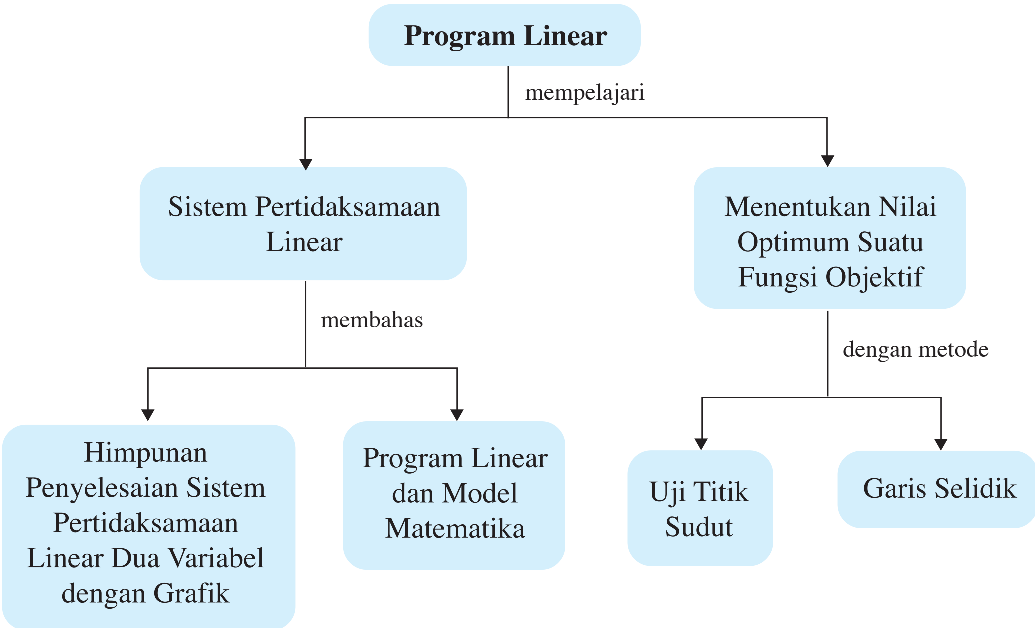
Setiap pedagang, pengusaha, atau orang yang berkecimpung di bidang usaha pasti menginginkan keuntungan sebanyak-banyaknya terhadap apa yang diupayakannya. Salah satu cara yang dapat ditempuh adalah menekan biaya produksi hingga sekecil-kecilnya. Dengan menyederhanakan beberapa faktor yang berpengaruh pada proses tersebut, pedagang atau pengusaha dapat membentuk suatu model matematika. Program linear merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan model matematika sederhana.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel;
2. menentukan fungsi tujuan (fungsi objektif) beserta kendala yang harus dipenuhi dalam masalah program linear;
3. menggambarkan kendala sebagai daerah di bidang yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear;
4. menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan sebagai penyelesaian dari program linear;
5. menafsirkan nilai optimum yang diperoleh sebagai penyelesaian program linear.

Peta Konsep



Kata Kunci

- fungsi objektif
- fungsi kendala
- model matematika
- nilai maksimum
- nilai minimum
- nilai optimal
- optimasi
- pertidaksamaan
- program linear
- sistem pertidaksamaan linear

Program linear sebagai bagian dari matematika banyak digunakan dalam berbagai bidang, antara lain dalam bidang ekonomi, pertanian, dan perdagangan. Dengan menggunakan program linear, seseorang dapat menghitung keuntungan maksimum atau biaya minimum. Hal itu sangat bergantung pada pembatas atau kendala, yaitu sumber daya yang tersedia.

Dalam mempelajari program linear, kita perlu mengingat kembali cara menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel dengan menggunakan grafik. Oleh karena itu, kita awali pembahasan ini dengan mengulang kembali cara menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Setelah hal ini kita pahami dengan baik, kita lanjutkan pembicaraan ini dengan membahas pengertian program linear dan model matematika, menentukan nilai optimum bentuk objektif, serta menyelesaikan soal-soal program linear.

Sebelum mempelajari bab ini, ada baiknya kalian jawab soal-soal berikut.

Uji Prasyarat — **Kerjakan di buku tugas**

1. Gambarlah grafik yang menyatakan himpunan penyelesaian dari:
   a. $6x + 5y < 11$
   b. $\begin{cases} x - 6y = -5 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$
2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear
   $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 6x + y = 7 \end{cases}$
   dengan metode substitusi dan metode eliminasi.
3. Ade membeli buku dan sebuah bolpoin di Toko Permata Ibu. Ade harus membayar Rp7.000,00. Di toko yang sama Ria membeli sebuah buku dan dua bolpoin. Ria harus membayar Rp4.000,00. Berapa harga buku di toko Permata Ibu? Berapa pula harga bolpoin?

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari kita lanjutkan ke materi berikut.

A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem (gabungan dua atau lebih) pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel merupakan irisan atau interseksi dari himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear yang terdapat pada sistem pertidaksamaan itu. Dalam bentuk grafik pada bidang koordinat, himpunan penyelesaian itu berupa daerah yang dibatasi oleh garis-garis dari sistem persamaan linearnya. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

1. Gambarlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear berikut pada bidang Cartesius. (R adalah himpunan bilangan real)
   a. $2x + 3y \geq 6$, dengan $x, y \in R$
   b. $x + 2y < 4$, dengan $x, y \in R$

   Penyelesaian:

   Sebelum menentukan daerah penyelesaiannya, kita perlu melukis batas-batas daerahnya, yakni grafik $2x + y = 6$ dan grafik $x + 2y = 4$.

   Karena batas yang dimaksud berbentuk linear, dapat dipastikan bahwa batas-batas daerahnya berupa garis-garis lurus. Jadi, untuk melukisnya cukup ditentukan 2 titik anggotanya, kemudian menghubungkannya menjadi sebuah garis lurus. Dua titik anggotanya yang mudah dihitung adalah titik potong garis itu dengan sumbu X dan sumbu Y. Skema perhitungannya dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.1

x	0	....
y	....	0
(x, y)	(0, ...)	(..., 0)

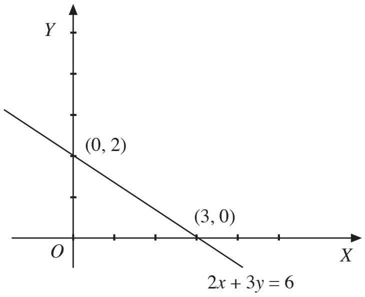
   a. $2x + y \geq 6$, dengan $x, y \in R$
   Batas daerah penyelesaiannya adalah grafik $2x + y = 6$.
   - Titik potong grafik dengan sumbu X, syaratnya $y = 0$. Berarti, $2x + 3(0) = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Oleh karena itu, titik potong grafik dengan sumbu X adalah (3, 0).
   - Titik potong grafik dengan sumbu Y, syaratnya $x = 0$. Berarti, $2(0) + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$. Oleh karena itu, titik potong grafik dengan sumbu Y adalah (0, 2).

   Jadi, isian tabel selengkapnya adalah sebagai berikut.

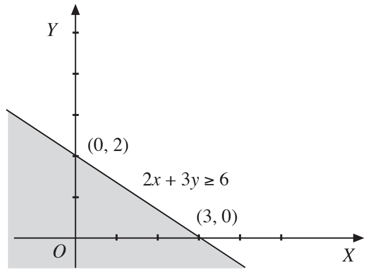
Tabel 1.2

x	0	3
y	2	0
(x, y)	(0, 2)	(3, 0)

   Grafik $2x + 3y = 6$ dapat diperoleh dengan membuat garis yang menghubungkan titik (3, 0) dan (0, 2) seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.1



Gambar 1.2

Pada **Gambar 1.1**, tampak bahwa garis $2x + y = 6$ membagi bidang Cartesius menjadi dua daerah, yaitu daerah di sebelah kanan (atas) garis dan daerah di sebelah kiri (bawah) garis itu. Untuk menentukan daerah yang memenuhi pertidaksamaan $2x + 3y \geq 6$, kita ambil sembarang titik untuk diselidiki, misalnya titik (0, 0). Kita substitusikan (0, 0) pada pertidaksamaan $2x + 3y \geq 6 \Leftrightarrow 2(0) + 3(0) \geq 6$ sehingga diperoleh $0 \geq 6$. Berdasarkan substitusi itu terlihat bahwa pertidaksamaan $0 \geq 6$ bernilai salah. Berarti, titik (0, 0) tidak berada pada daerah penyelesaian $2x + 3y \geq 6$. Karena daerah yang diminta adalah $2x + 3y > 6$, titik-titik yang berada pada garis $2x + 3y = 6$ termasuk daerah penyelesaian. Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir, seperti pada **Gambar 1.2**.

Ketahuilah

Pada buku ini, kita tetapkan bahwa daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan adalah daerah yang bersih (yang tidak diarsir), sedangkan daerah yang diberi arsir *bukan* merupakan daerah himpunan penyelesaian.

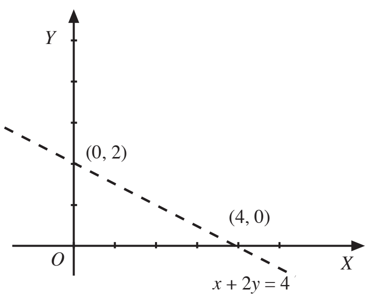
b. $x + 2y < 4$, dengan $x, y \in R$

Titik potong grafik $x + 2y = 4$ dengan sumbu koordinat

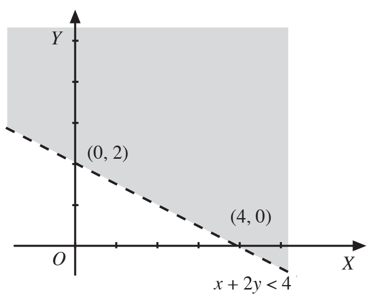
Tabel 1.3

x	0	4
y	2	0
(*x*, *y*)	(0, 2)	(4, 0)

Jadi, titik potongnya adalah (0, 2) dan (4, 0). Grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 1.3



Gambar 1.4

Kita selidiki titik (0, 0) dengan menyubstitusikannya pada pertidaksamaan $x + 2y < 4$ sehingga diperoleh $0 + 2(0) < 4 \Leftrightarrow 0 < 4$. Terlihat bahwa pertidaksamaan $0 < 4$ benar. Berarti, titik (0, 0) berada pada daerah penyelesaian $x + 2y < 4$, sedangkan garis $x + 2y = 4$ tidak memenuhi pertidaksamaan sehingga digambar putus-putus. Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir, seperti terlihat pada **Gambar 1.4**.

2. Gambarlah pada bidang Cartesius, himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut, untuk $x, y \in R$.

a. $\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 7 \\ 4x + 3y \leq 24 \end{cases}$

Penyelesaian:

a. Sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 4$ dan $x + y \leq 3$, dengan $x, y \in R$

Titik-titik potong garis $2x + y = 4$ dan $x + y = 3$ dengan sumbu koordinat

- Untuk $2x + y = 4$

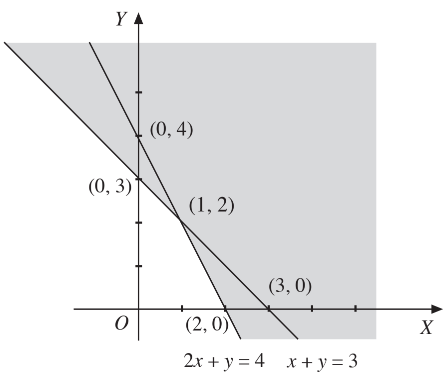
Tabel 1.4

x	0	2
y	4	0
(x, y)	(0, 4)	(2, 0)

- Untuk $x + y = 3$

Tabel 1.5

x	0	3
y	3	0
(x, y)	(0, 3)	(3, 0)



Gambar 1.5

Keterangan:

- Penyelesaian pertidaksamaan $2x + y \leq 4$ adalah daerah di sebelah kiri garis $2x + y = 4$ (yang diarsir di sebelah kanan).
- Penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 3$ adalah daerah di sebelah kiri garis $x + y = 3$ (yang diarsir di sebelah kanan).
- Titik potong garis $2x + y = 4$ dan $x + y = 3$

$$\begin{array}{rl} 2x + y &= 4 \\ x + y &= 3 \\ \hline x \quad &= 1 \end{array} -$$

Berarti, $x + y = 3 \Leftrightarrow 1 + y = 3 \Leftrightarrow y = 2$.

Jadi, titik potongnya adalah (1, 2).

Dengan demikian, himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 4$, $x + y \leq 3$, untuk $x, y \in R$ adalah daerah yang tidak diarsir (bersih), seperti terlihat pada **Gambar 1.5**.

b. Sistem pertidaksamaan: $x, y \geq 0$, $x + y \leq 7$, $4x + 3y \leq 24$

Titik-titik potong garis $x + y = 7$ dan $4x + 3y = 24$ dengan sumbu koordinat

- Untuk $x + y = 7$

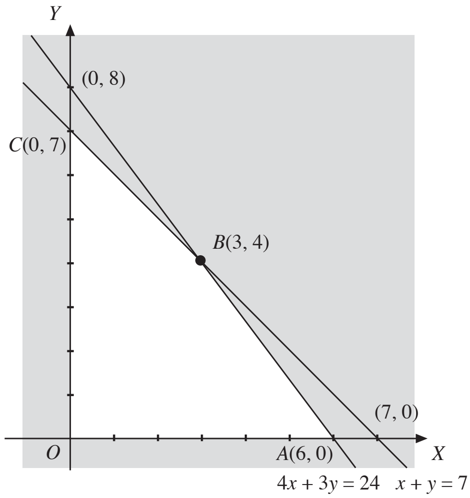
Tabel 1.6

x	0	7
y	7	0
(x, y)	(0, 7)	(7, 0)

- Untuk $4x + 3y = 24$

Tabel 1.7

x	0	6
y	8	0
(x, y)	(0, 8)	(6, 0)



Gambar 1.6

Keterangan:

- Penyelesaian $x \geq 0$ adalah daerah di sebelah kanan sumbu Y.
- Penyelesaian $y \geq 0$ adalah daerah di sebelah atas sumbu X.
- Penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 7$ adalah daerah di sebelah kiri garis $x + y = 7$.
- Penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 24$ adalah daerah di sebelah kiri garis $4x + 2y = 24$.

- Titik potong antara garis $x + y = 7$ dan $4x + 3y = 24$

$$\begin{array}{ll|lcl} x + y & = 7 & \times\ 3 & \rightarrow & 3x + 3y = 21 \\ 4x + 3y & = 24 & \times\ 1 & \rightarrow & \underline{4x + 3y = 24} \; - \\ & & & & -x \quad = -3 \Leftrightarrow x = 3 \end{array}$$

Berarti, $x + y = 7 \Leftrightarrow 3 + y = 7 \Leftrightarrow y = 4$.

Jadi, koordinat titik potongnya adalah (3, 4).

Dengan demikian, himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 7$, $4x + 3y \leq 24$, dengan $x, y \in R$ adalah daerah segi empat $OABC$ yang tidak diarsir, seperti terlihat pada **Gambar 1.6**.

Tugas Kreativitas **Kerjakan di buku tugas**

Dengan cara-cara yang telah kalian pelajari, coba gambarlah daerah penyelesaian

$$\begin{cases} x + y \leq 0 \\ x - y \geq 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ada berapa titik yang termasuk dalam himpunan penyelesaian? Titik manakah itu?

Uji Kompetensi 1 — Kerjakan di buku tugas

1. Gambarlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear berikut pada bidang Cartesius.
   a. $3x + 5y < 15$
   b. $4x - 6y > 24$
   c. $x + 4y < 12$
   d. $5x - 4y > 20$
   e. $2x + 5y > 20$
   f. $x - 3y > 18$
   g. $6x + 5y \le 30$
   h. $8x - 6y \le 48$
2. Gambarlah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear berikut pada bidang Cartesius.
   a. $\begin{cases} x - y \le -2 \\ 8x + 10y \le 55 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 2x + 8y \le 60 \\ 4x + 4y \le 60 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x + y \ge 2 \\ x - y \ge -1 \\ 5x + 3y \le 15 \\ x \ge 0, y \le 0 \end{cases}$
   d. $\begin{cases} 2x + 4y \ge 8 \\ 2x - 5y \ge 0 \\ -x + 5y \le 5 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$
   e. $\begin{cases} x + 2y \le 10 \\ 2x + y \le 10 \\ y \le 4 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$
   f. $\begin{cases} 4 \le x + y \le 10 \\ -6 \le x - y \le 0 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

B. Merancang Model Matematika yang Berkaitan dengan Program Linear

Matematika mempunyai kaitan yang erat dengan persoalan-persoalan real yang terjadi di tengah kehidupan kita. Persoalan-persoalan seperti ini di antaranya dapat diselesaikan melalui program linear. *Program linear* adalah suatu metode atau program untuk memecahkan masalah optimasi yang mengandung kendala-kendala atau batasan-batasan yang dapat diterjemahkan dalam bentuk sistem pertidaksamaan linear. Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear ini dapat disajikan dalam daerah himpunan penyelesaian. Di antara beberapa penyelesaian yang terdapat dalam daerah penyelesaian, terdapat satu penyelesaian terbaik yang disebut *penyelesaian optimum*. Jadi, tujuan program linear adalah mencari penyelesaian optimum yang dapat berupa nilai maksimum atau nilai minimum dari suatu fungsi. Fungsi tersebut dinamakan *fungsi sasaran*. Fungsi sasaran disebut juga *fungsi tujuan* atau *fungsi objektif*.

Untuk dapat menyelesaikan program linear, terlebih dahulu kita harus menerjemahkan persoalan (kendala-kendala atau batasan-batasan yang terdapat dalam masalah program linear) ke dalam bahasa matematika yang disebut *model matematika*. Jadi, *model matematika* adalah suatu rumusan matematika (berupa persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi) yang diperoleh dari hasil penafsiran atau terjemahan suatu masalah program linear ke dalam bahasa matematika. Model matematika yang baik memuat bagian-bagian yang diperlukan. Untuk lebih jelasnya, lakukan kegiatan berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Sebuah kapal pesiar dapat menampung 150 orang penumpang. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa 60 kg bagasi dan penumpang kelas ekonomi 40 kg. Kapal itu hanya dapat membawa 8.000 kg bagasi. Jika banyak penumpang kelas utama adalah x dan banyak penumpang kelas ekonomi adalah y maka sistem pertidaksamaan yang harus dipenuhi adalah ....

a. $x + y \le 150$, $3x + 2y \le 800$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
b. $x + y \le 150$, $3x + 2y \le 400$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
c. $x + y \ge 150$, $3x + 2y \le 400$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
d. $x + y \le 150$, $3x + 3y \le 400$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
e. $x + y \le 150$, $3x + 3y \le 800$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

Soal Ebtanas SMA, 1996

Kegiatan — *Kerjakan di buku tugas*

Disajikan permasalahan berikut.
Seorang tukang mebel membuat kursi dan meja. Setidak-tidaknya harus diproduksi 500 mebel, yang terdiri atas kursi dan meja. Pengerjaan kursi memerlukan waktu 2 jam, sedangkan pengerjaan meja memerlukan waktu 5 jam. Waktu yang tersedia 1.500 jam. Harga jual eceran kursi Rp75.000,00 dan meja Rp125.000,00. Bagaimana model matematikanya?

Tujuan:
Membentuk model matematika dari permasalahan tersebut.

Permasalahan:
Bagaimana model matematika dari permasalahan tersebut?

Langkah-Langkah:
1. Misalkan x = banyak kursi dan y = banyak meja.
2. Tulislah pertidaksamaan linear dua variabel untuk jumlah mebel yang diproduksi. Perhatikan kendala bahwa paling sedikit harus diproduksi mebel sebanyak 500 buah.
$$\ldots x + \ldots y \geq 500$$
3. Tulislah pertidaksamaan linear untuk waktu total produksi. Perhatikan kendala bahwa waktu total produksi adalah 1.500 jam.
$$\ldots x + \ldots y \leq 1.500$$
4. Tulis juga dua kendala lainnya, yaitu tiap jenis mebel tidak mungkin negatif.
$$\ldots \geq 0 \text{ dan } \ldots \geq 0$$
5. Tulislah pernyataan untuk fungsi tujuan jika pabrik menginginkan memperoleh pendapatan kotor paling besar.
$$\text{Fungsi tujuan } z = \ldots x + \ldots y$$
6. Simpulkan model matematika yang kalian peroleh.
Kendala: $\begin{cases} \ldots x + \ldots y \geq 500 \\ \ldots x + \ldots y \leq 1.500 \\ \ldots \geq 0 \text{ dan } \ldots \geq 0 \end{cases}$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = \ldots x + \ldots y$

Kesimpulan:
Dari langkah-langkah di atas akan diperoleh model matematika.
Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 75.000x + 125.000y$
Kendala: $\begin{cases} x + y \geq 500 \\ 2x + 5y \leq 1.500 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$

Setelah melakukan kegiatan di atas, tentu kalian mampu memahami contoh-contoh berikut dengan mudah.

Contoh:

1. Luas suatu lahan parkir adalah 400 m^2. Luas rata-rata satu mobil dan satu bus masing-masing adalah 8 m^2 dan 24 m^2. Lahan parkir tersebut hanya memuat paling banyak 20 kendaraan. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut dengan memisalkan mobil yang sedang diparkir sebanyak x dan bus sebanyak y.

   Penyelesaian:

   Dari keterangan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut.

   $8x + 24y \leq 400$

   $x + y \leq 20$

   Karena x dan y masing-masing menunjukkan banyaknya mobil dan bus, x dan y berupa bilangan cacah. Jadi, model matematika persoalan tersebut adalah

   $$\begin{cases} 8x + 24y \leq 400 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

2. Suatu industri rumah tangga memproduksi dua jenis roti, yaitu roti jenis A dan roti jenis B. Roti jenis A memerlukan 150 g tepung dan 50 g mentega. Roti jenis B memerlukan 75 g tepung dan 75 g mentega. Banyaknya tepung yang tersedia adalah 2,25 kg, sedangkan banyaknya mentega yang tersedia adalah 1,25 kg. Pemilik industri rumah tangga itu ingin membuat kedua jenis roti tersebut sebanyak-banyaknya. Buatlah model matematika dari masalah tersebut.

   Penyelesaian:

   Misalkan banyaknya roti jenis A adalah x dan roti jenis B adalah y. Keterangan pada soal di atas dapat dirangkum dalam tabel berikut.

   Tabel 1.8

	Roti Jenis A	Roti Jenis B	Maksimum
Tepung (gram)	$150x$	$75y$	2.250
Mentega (gram)	$50x$	$75y$	1.250

   Banyaknya tepung yang digunakan untuk membuat kedua jenis roti tersebut adalah $(150x + 75y)$ g, sedangkan banyaknya tepung yang tersedia adalah 2.250 g sehingga diperoleh hubungan $150x + 75y \leq 2.250$ atau $2x + y \leq 30$ .... (1)

   Banyaknya mentega yang digunakan untuk membuat kedua jenis roti tersebut adalah $(50x + 75y)$ g, sedangkan banyaknya mentega yang tersedia adalah 1.250 g sehingga diperoleh hubungan $50x + 75y \leq 1.250$ atau $2x + 3y \leq 50$ .... (2)

   Karena x dan y masing-masing menyatakan banyaknya roti, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ .... (3)

   Nilai-nilai x dan y berupa bilangan cacah.

   Karena permasalahannya adalah bagaimana membuat kedua jenis roti sebanyak-banyaknya (memaksimumkan), fungsi objektif atau fungsi sasarannya adalah menentukan $x + y$ maksimum.

Misalkan fungsi sasarannya z maka $z = x + y$.
Pertidaksamaan (1) sampai dengan (3) merupakan kendala (pembatas) sehingga model matematika tersebut dapat ditulis sebagai berikut.
Fungsi objektif: menentukan nilai maksimum $z = x + y$
Kendala: $\begin{cases} 2x + y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$

Problem Solving

Seorang pedagang es menjual dua jenis es krim, yaitu jenis I dan jenis II. Harga beli es krim jenis I adalah Rp700,00 per bungkus dan es krim jenis II Rp600,00 per bungkus. Modal yang dimiliki pedagang tersebut Rp168.000,00, sedangkan termos es yang digunakan untuk menjual es tidak dapat memuat lebih dari 300 bungkus es krim. Keuntungan es krim jenis I adalah Rp300,00 per bungkus dan jenis II adalah Rp200,00 per bungkus. Penjual es itu ingin memperoleh keuntungan sebanyak-banyaknya. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut.

Penyelesaian:
Misalkan banyaknya es krim jenis I adalah x dan jenis II adalah y sehingga dari persoalan di atas, dapat dibuat tabel persoalan berikut.

Tabel 1.9

	Es Krim Jenis I	Es Krim Jenis II	Maksimum
Banyaknya Es Krim	x	y	300
Harga Beli Per Bungkus	$700x$	$600y$	168.000

Karena termos es dapat memuat tidak lebih dari 300 bungkus, sedangkan banyaknya es krim jenis I dan II adalah $(x + y)$ bungkus, diperoleh hubungan
$x + y \leq 300$ .... (1)
Modal yang dimiliki Rp168.000, sedangkan uang yang diperlukan untuk membeli kedua jenis es krim adalah $(700x + 600y)$, diperoleh hubungan
$700x + 600y \leq 168.000$ atau $7x + 6y \leq 1.680$..(2)
Karena x dan y menyatakan banyaknya es krim maka $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ .... (3)
Nilai-nilai x dan y adalah bilangan cacah. Karena permasalahannya adalah menentukan keuntungan maksimum yang diharapkan oleh pedagang es, fungsi objektifnya adalah menentukan nilai maksimum $z = 300x + 200y$.
Model matematikanya adalah sebagai berikut.
Fungsi objektif: menentukan nilai maksimum $z = 300x + 200y$
Kendala: $\begin{cases} x + y \leq 300 \\ 7x + 6y \leq 1.680 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui jumlah dua bilangan nonnegatif x dan y tidak lebih dari 25, sedangkan 4 kali bilangan x ditambah 2 kali bilangan y tidak lebih dari 75. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
2. Seorang pedagang buah menjual buah mangga dan buah jeruk yang ditempatkan dalam satu keranjang. Daya tampung keranjang itu tidak lebih dari 1.000 buah. Harga satu buah mangga dan satu buah jeruk masing-masing Rp500,00 dan Rp1.000,00. Apabila seluruh buah terjual, uang yang ia peroleh tidak lebih dari Rp750.000,00. Jika banyaknya buah mangga dan buah jeruk masing-masing adalah x dan y, buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
3. Harga karcis dalam suatu gedung pertunjukan dibedakan menjadi dua kelompok umur, yaitu anak-anak dan dewasa yang masing-masing seharga Rp2.500,00 dan Rp5.000,00. Jika karcis terjual habis, uang yang terkumpul seluruhnya tidak lebih dari Rp125.000,00, sedangkan daya tampung gedung tersebut paling banyak 1.000 orang. Apabila x dan y masing-masing menyatakan banyaknya anak-anak dan orang dewasa yang mengunjungi suatu pertunjukan di gedung tersebut, tentukan model matematika dari permasalahan tersebut.
4. Seorang anak yang membeli 8 buku tulis dan 5 pensil harus membayar Rp18.500,00. Anak yang lain membeli 4 buku tulis dan 6 pensil harus membayar Rp11.000,00. Jika harga satu buku tulis dan satu pensil masing-masing x dan y, buatlah model matematika untuk persoalan tersebut.
5. Suatu pabrik mainan memproduksi 2 jenis mainan, yaitu jenis I dan II. Keuntungan setiap mainan jenis I adalah Rp3.000,00, sedangkan jenis II Rp5.000,00. Mainan jenis I memerlukan waktu 6 jam untuk membuat bahan-bahannya, 4 jam untuk memasang, dan 5 jam untuk mengepak. Mainan jenis II memerlukan waktu 3 jam untuk membuat bahannya, 6 jam untuk memasang, dan 5 jam untuk mengepak. Suatu pesanan sedang dikerjakan pabrik itu dengan alokasi waktu 54 jam untuk membuat bahan-bahannya, 48 jam untuk memasang, dan 50 jam untuk mengepak. Pabrik tersebut berharap untuk mendapatkan keuntungan maksimum dari pesanan tersebut. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
6. Seorang ahli pertanian ingin mencampur dua jenis pupuk dengan memberikan 15 g kalium karbonat, 20 g nitrat, dan 24 g fosfat seminimal mungkin pada suatu takaran. Satu takaran pupuk merek I yang harganya Rp75.000,00 per bungkus memerlukan 3 g kalium karbonat, 1 g nitrat, dan 1 g fosfat. Pupuk merek II harganya Rp60.000,00 per bungkus memerlukan 1 g kalium karbonat, 5 g nitrat, dan 2 g fosfat. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut agar pengeluarannya sekecil mungkin.

Diskusi — Mengomunikasikan Gagasan

Dalam program linear apakah ada suatu keharusan bahwa dalam fungsi kendala memuat batasan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$?

Soal Terbuka — **Kerjakan di buku tugas**

1. Suatu perusahaan mebel mengerjakan proses *finishing* 2 model meja, yaitu model klasik dan modern. Meja model klasik memerlukan waktu 2 jam untuk mengampelas dan 3 jam untuk mewarnai. Meja model modern memerlukan waktu 4 jam untuk mengampelas dan 1 jam untuk mewarnai. Perusahaan tersebut memiliki waktu untuk mengerjakan pesanan selama 60 jam untuk mengampelas dan 80 jam untuk mewarna. Perusahaan tersebut berharap untuk mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya dari penjualan meja tersebut. Jika keuntungan penjualan masing-masing meja model klasik dan modern adalah Rp150.000,00 dan Rp180.000,00 per meja, buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
2. Seorang peternak menginginkan ternaknya mendapatkan paling sedikit 24 g zat besi dan 8 g vitamin setiap hari. Satu takaran jagung memberikan 2 g zat besi dan 5 g vitamin, sedangkan satu takaran padi-padian memberikan 2 g zat besi dan 1 g vitamin. Peternak itu ingin mencampur bahan makanan tersebut untuk mendapatkan biaya yang semurah-murahnya. Jika harga jagung Rp1.500,00 per bungkus dan harga padi-padian Rp2.500,00 per bungkus, buatlah model matematika dari persoalan tersebut.

C. Menyelesaikan Model Matematika dan Menafsirkannya

Kalian telah mampu merancang model matematika yang berkaitan dengan masalah program linear. Model itu tidak akan banyak berarti jika kalian tidak menyelesaikan permasalahan yang timbul dari model itu. Menyelesaikan model itu sama halnya menentukan nilai optimum (maksimum/minimum) dari fungsi objektifnya, kemudian menafsirkannya pada persoalan semula.

1. Fungsi Objektif *ax* + *by*

Untuk memahami pengertian bentuk objektif $ax + by$, perhatikan kembali model matematika pada contoh-contoh yang telah kita pelajari di atas.

a. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} 2x + y \le 30 \\ 2x + 3y \le 50 \\ x \ge 0,\ y \ge 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = x + y$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$$\begin{cases} 2x + y \le 40 \\ x + 2y \le 40 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$

terletak pada daerah berbentuk ....

a. trapesium
b. persegi panjang
c. segitiga
d. segi empat
e. segi lima

Soal PPI, 1982

b. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} x + y \leq 300 \\ 4x + 3y \leq 1.120 \\ x \geq 0,\ y \geq 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 25x + 10y$

Dengan memerhatikan kedua model matematika pada contoh di atas, kita ketahui bahwa tujuan yang hendak dicapai dalam suatu model matematika dinyatakan dalam bentuk persamaan $z = ax + by$. Bentuk $ax + by$ yang hendak dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan) tersebut dinamakan fungsi objektif. Dengan kata lain, fungsi objektif dalam program linear adalah fungsi $z = ax + by$ yang hendak ditentukan nilai optimumnya.

2. Menentukan Nilai Optimum Fungsi Objektif

Setelah kita memahami pengertian model matematika dan fungsi objektif, kita dapat mengetahui tujuan yang hendak dicapai dari persoalan program linear, yaitu menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif. Langkah-langkah untuk menyelesaikan persoalan program linear secara umum adalah

1. menerjemahkan atau merumuskan permasalahan ke dalam model matematika;
2. menyelesaikan sistem pertidaksamaan yang merupakan kendala atau pembatas;
3. mencari penyelesaian optimum (maksimum atau minimum);
4. menjawab permasalahan.

Berkaitan dengan hal tersebut, kita dapat menggunakan metode grafik yang terdiri atas dua macam cara, yaitu metode uji titik sudut dan metode garis selidik.

a. Metode Uji Titik Sudut

Dengan metode ini, nilai optimum dari bentuk objektif $z = ax + by$ ditentukan dengan menghitung nilai-nilai $z = ax + by$ pada setiap titik sudut (titik verteks) yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel. Beberapa nilai yang diperoleh itu, kemudian dibandingkan. Nilai yang paling besar merupakan nilai maksimum dari $z = ax + by$, sedangkan nilai yang paling kecil merupakan nilai minimum dari $z = ax + by$.

Untuk lebih memahami cara menentukan nilai optimum fungsi objektif dengan uji titik sudut, perhatikan contoh-contoh berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Nilai minimum dari $z = 3x + 6y$ yang memenuhi syarat

$$\begin{cases} 4x + y \geq 20 \\ x + y \leq 20 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

adalah ....

a. 50 d. 20
b. 40 e. 10
c. 30

Soal UMPTN, 2001

Contoh:

1. Tentukan nilai optimum bentuk objektif dari model matematika berikut.
   Sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
   $$\begin{cases} 2x + y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$
   Fungsi objektif: memaksimumkan $z = x + y$

   Penyelesaian:

   Titik potong garis dengan persamaan $2x + y = 30$ dan $2x + 3y = 50$ dengan sumbu koordinat dapat ditentukan dengan membuat tabel, seperti pada **Tabel 1.10** dan **Tabel 1.11**.

   - Untuk $2x + y = 30$

   Tabel 1.10

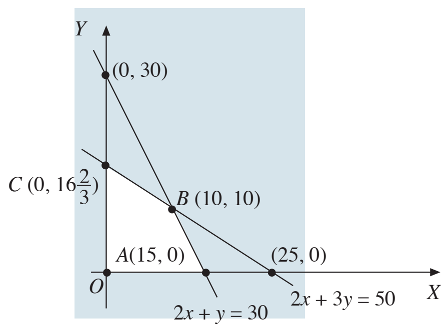
x	0	15
y	30	0
(x, y)	(0, 30)	(15, 0)

   - Untuk $2x + 3y = 50$

   Tabel 1.11

x	0	25
y	$16\frac{2}{3}$	0
(x, y)	$(0, 16\frac{2}{3})$	(25, 0)

Pasangan koordinat tersebut kita lukis pada bidang koordinat dan dihubungkan dengan sebuah garis lurus. Setelah garis $2x + y = 30$ dan $2x + 3y = 50$ terlukis, tentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $2x + y \leq 30$ dan $2x + 3y \leq 50$, seperti pada gambar di bawah.



Gambar 1.7

Daerah himpunan penyelesaiannya diperlihatkan sebagai bagian yang bersih (tidak diarsir). Titik potong kedua garis tersebut adalah

$$\begin{array}{rl} 2x + y &= 30 \\ 2x + 3y &= 50 \\ \hline -2y &= -20 \end{array} \; -$$

$-2y = -20$ atau $y = 10$

Karena nilai $y = 10$ maka $2x + y = 30 \Leftrightarrow 2x + 10 = 30 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = 10$.
Jadi, koordinat titik potong kedua garis itu adalah (10, 10).
Dari **Gambar 1.7**, tampak bahwa titik-titik sudut yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian adalah titik $O(0, 0)$, $A(15, 0)$, $B(10, 10)$, dan $C(0, 16\frac{2}{3})$.
Selanjutnya, selidiki nilai fungsi objektif $z = x + y$ untuk masing-masing titik sudut tersebut.

Tabel 1.12

Titik	$O(0, 0)$	$A(15, 0)$	$B(10, 10)$	$C(0, 16\frac{2}{3})$
x y	0 0	15 0	10 10	0 $16\frac{2}{3}$
$z = x + y$	0	15	20	$16\frac{2}{3}$

z maksimum

Dari tabel tersebut, nilai maksimum fungsi objektif $z = x + y$ adalah 20, yaitu untuk $x = 10$ dan $y = 10$.

2. Seorang pedagang beras hendak mengangkut 60 ton beras dari gudang ke tokonya. Untuk keperluan tersebut, ia menyewa dua jenis kendaraan, yaitu truk dan pikap. Dalam sekali jalan, satu truk dapat mengangkut 3 ton beras, sedangkan pikap dapat mengangkut 2 ton beras. Untuk sekali jalan, biaya sewa truk adalah Rp50.000,00, sedangkan pikap Rp40.000,00. Dengan cara sewa seperti ini, pedagang beras tersebut diharuskan menyewa kedua kendaraan itu sekurang-kurangnya 24 kendaraan. Berapa banyak truk dan pikap yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum dan berapa biaya minimum tersebut?

Penyelesaian:
Misalkan banyaknya truk adalah x dan banyaknya pikap adalah y. Berdasarkan soal di atas, dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Tabel 1.13

	Jenis I	**Jenis II**	**Maksimum**
Banyak Kendaraan Banyak Muatan (ton)	x $3x$	y $2y$	24 60

Dari diagram tersebut, diperoleh sistem pertidaksamaan berikut.

$$\begin{cases} x + y \geq 24 \\ 3x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0,\ y \geq 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: meminimumkan $z = 50.000x + 40.000y$

Untuk membuat garis $x + y = 24$ dan $3x + 2y = 60$, kita tentukan titik potong garis-garis tersebut terhadap sumbu-sumbu koordinat dengan membuat tabel seperti berikut.

- Untuk $x + y = 24$

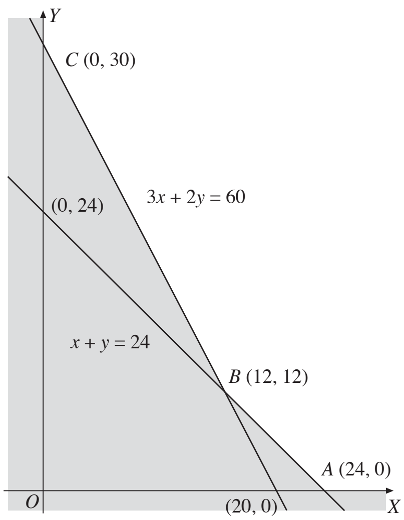
Tabel 1.14

x	0	24
y	24	0
(x, y)	(0, 24)	(24, 0)

- Untuk $3x + 2y = 60$

Tabel 1.15

x	0	20
y	30	0
(x, y)	(0, 30)	(20, 0)



Gambar 1.8

Daerah penyelesaiannya terlihat pada **Gambar 1.8**.

Menentukan titik potong kedua garis

$$\begin{array}{l|l} x + y = 24 & \times\ 2 \rightarrow 2x + 2y = 48 \\ 3x + 2y = 60 & \times\ 1 \rightarrow 3x + 2y = 60 \quad - \end{array}$$

$$-x = -12$$

$$\Leftrightarrow x = 12$$

Karena $x = 12$ maka

$x + y = 24 \Leftrightarrow 12 + y = 24 \Leftrightarrow y = 12$.

Jadi, koordinat titik potong kedua garis itu adalah (12, 12).

Dari gambar di samping, tampak bahwa titik-titik sudut yang terdapat pada daerah penyelesaian adalah $A(24, 0)$, $B(12, 12)$, dan $C(0, 30)$. Nilai bentuk objektif $z = 50.000x + 40.000y$ untuk masing-masing titik tersebut, dapat diselidiki dengan membuat tabel sebagai berikut.

Tabel 1.16

Titik	$A(24, 0)$	$B(12, 12)$	$C(0, 30)$
x y	24 0	12 12	0 30
$50.000x + 40.000y$	1.200.000	1.080.000	1.200.000

Dari tabel tersebut, nilai minimum bentuk objektif $z = 50.000x + 40.000y$ adalah 1.080.000, yaitu untuk $x = 12$ dan $y = 12$.

Jadi, banyaknya kendaraan yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum adalah 12 truk dan 12 pikap. Biaya minimumnya adalah Rp1.080.000,00.

b. Metode Garis Selidik $ax + by = k$

Menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif dengan menggunakan uji titik sudut memerlukan perhitungan dan waktu yang cukup lama. Untuk itu, sering digunakan metode yang lebih sederhana, yaitu metode garis selidik yang berbentuk $ax + by = k$.

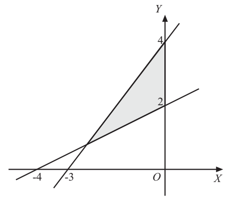
Misalkan terdapat suatu fungsi objektif $z = ax + by$, dengan a dan b bilangan real. Dengan mengambil beberapa nilai k_i untuk z, yaitu $k_1, k_2, ..., k_n$, diperoleh n garis selidik yang memiliki persamaan sebagai berikut.

$k_1 = ax + by$
$k_2 = ax + by$
...
$k_n = ax + by$

Garis-garis tersebut mempunyai gradien yang sama, yaitu $m = -\frac{a}{b}$. Dengan demikian, garis-garis tersebut merupakan garis-garis yang sejajar. Apabila digambarkan, sebagian dari garis-garis tersebut terletak pada daerah penyelesaian pertidaksamaan linear (daerah *feasibel*) dan salah satu di antaranya melalui titik optimum. Garis yang melalui titik optimum inilah yang menghasilkan nilai optimum bagi fungsi objektif $z = ax + by$. Garis selidik yang berada paling kanan atau paling atas pada daerah penyelesaian menunjukkan nilai maksimum, sedangkan garis selidik yang berada paling kiri atau paling bawah pada daerah penyelesaian menunjukkan nilai minimum.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas



Pada gambar di atas, daerah yang diwarnai gelap memenuhi sistem pertidaksamaan

a. $y \geq 0$, $x \leq 0$, $3y \geq 4x + 12$, $x - 2y \leq -4$
b. $x \leq 0$, $3y \leq 4x + 12$, $x - 2y \geq -4$
c. $x \leq 0$, $2y - x \geq 4$, $3y \leq 4x + 12$
d. $x \leq 0$, $y \geq 9$, $3y \leq 4x + 12$, $2y - x \leq 4$
e. $y \geq 0$, $x \leq 0$, $2y - x \geq 4$, $3y \geq 4x + 12$

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

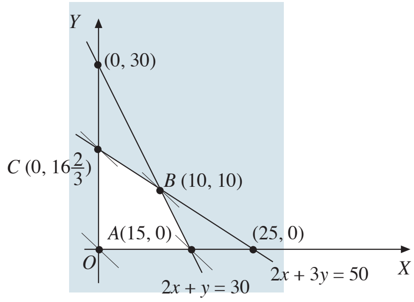
Buktikan bahwa n garis selidik dengan persamaan
$k_1 = ax + by$
$k_2 = ax + by$
....
$k_n = ax + by$ mempunyai gradien $m = -\frac{a}{b}$.

Contoh:

1. Tentukan nilai optimum bentuk objektif model matematika berikut.
Sistem pertidaksamaan linear dua variabel:
$$\begin{cases} 2x + y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x, y \geq 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$
Fungsi objektif: memaksimumkan $z = x + y$

Penyelesaian:

Terlebih dahulu kita buat garis $x + y = k$, dengan $k = 0$, yaitu $x + y = 0$. Kemudian, kita buat garis-garis yang sejajar dengan garis $x + y = 0$, yaitu dengan mengambil nilai k yang berbeda-beda, seperti pada gambar di samping.



Gambar 1.9

Dari **Gambar 1.9**, tampak bahwa apabila nilai k makin besar, letak garis-garis $x + y = k$ makin jauh dari titik $O(0, 0)$. Karena nilai k bersesuaian dengan nilai z, nilai z terbesar dan nilai z terkecil bersesuaian dengan garis terjauh dan garis terdekat dari titik $O(0, 0)$. Nilai z maksimum diperoleh dari garis $x + y = k$ yang melalui titik (10, 10), yaitu $10 + 10 = 20$ dan nilai z minimum diperoleh dari garis $x + y = k$ yang melalui titik $O(0, 0)$, yaitu $0 + 0 = 0$.

2. Seperti soal nomor 2 (halaman 16), tetapi selesaikan dengan menggunakan metode garis selidik.

Penyelesaian:

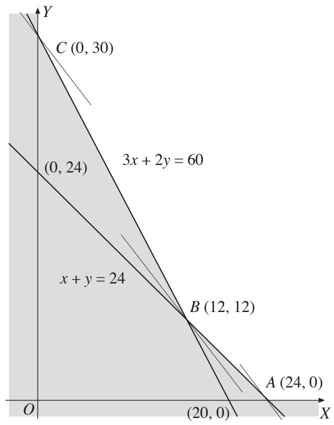
Dari soal yang dimaksud, diperoleh model matematika

$$\begin{cases} x + y \geq 24 \\ 3x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Fungsi objektif:

meminimumkan $z = 50.000x + 40.000y$

Dari informasi soal tersebut, diperoleh himpunan penyelesaian yang dapat dilihat pada gambar di samping.



Gambar 1.10

Terlebih dahulu dibuat garis $50.000x + 40.000y = k$, dengan k berbeda-beda, seperti pada **Gambar 1.10**. Dari gambar itu, tampak bahwa makin kecil nilai k, makin dekat ke titik O (0, 0). Karena nilai k bersesuaian dengan nilai z, maka nilai z terkecil (minimum) bersesuaian dengan garis terdekat dengan titik O (0, 0). Garis terdekat yang dimaksud melalui titik A (12, 12). Jadi, nilai z minimum adalah $z = 50.000(12) + 40.000(12) = 1.080.000$.

Jadi, banyak kendaraan yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum adalah 12 truk dan 12 pikap. Biaya minimumnya adalah Rp1.080.000,00.

Tampak bahwa dengan kedua cara, akan memberikan hasil yang sama.

Problem Solving

Suatu pabrik farmasi memproduksi dua jenis kapsul, yaitu jenis I dan jenis II. Setiap kapsul jenis I mengandung 6 mg vitamin A, 8 mg vitamin C, dan 1 mg vitamin E. Setiap kapsul jenis II mengandung 8 mg vitamin A, 3 mg vitamin C, dan 4 mg vitamin E. Setiap hari, seorang pasien memerlukan tambahan vitamin selain berasal dari makanan dan minuman sebanyak 40 mg vitamin A, 24 mg vitamin C, dan 12 mg vitamin E. Harga satu kapsul jenis I adalah Rp1.000,00 dan kapsul jenis II adalah Rp1.500,00. Berapa banyak uang minimal yang harus disediakan pasien tersebut untuk memenuhi kebutuhan vitaminnya setiap hari.

Penyelesaian:

Misalkan banyaknya kapsul jenis I adalah x dan kapsul jenis II adalah y. Berdasarkan banyaknya kandungan vitamin yang diketahui, dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Tabel 1.17

Vitamin	Kapsul Jenis I (mg)	Kapsul Jenis II (mg)	Kebutuhan Minimum (mg)
Vitamin A	$6x$	$8y$	40
Vitamin C	$8x$	$3y$	24
Vitamin E	x	$4y$	12

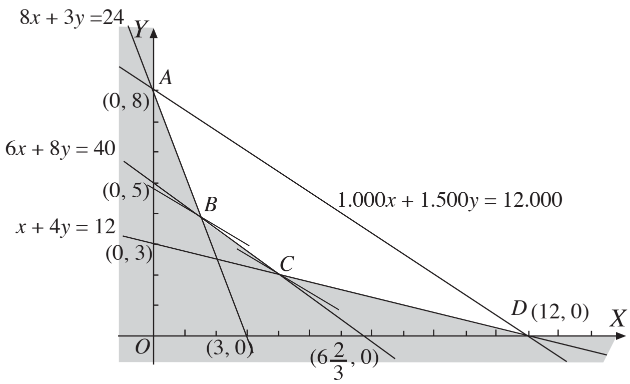
Model matematikanya adalah sebagai berikut.

Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 40 \\ 8x + 3y \geq 24 \\ x + 4y \geq 12 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: meminimumkan $z = 1.000x + 1.500y$

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear di atas digam-barkan sebagai daerah yang tidak diarsir, seperti pada gambar di samping.



Gambar 1.11

Titik B adalah perpotongan garis $8x + 3y = 24$ dan $6x + 8y = 40$. Koordinat titik B dapat ditentukan dengan metode eliminasi sebagai berikut.

$$\begin{array}{l|l} 8x + 3y = 24 & \times\ 8 \rightarrow 64x + 24y = 192 \\ 6x + 8y = 40 & \times\ 3 \rightarrow 18x + 24y = 120 \ - \\ \hline & \quad\quad 46x = 72 \Leftrightarrow x = 1\tfrac{13}{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 8x + 3y = 24 & \times\ 3 \rightarrow 24x + 9y = 72 \\ 6x + 8y = 40 & \times\ 4 \rightarrow 24x + 32y = 160 \ - \\ \hline & \quad\quad -23y = -88 \Leftrightarrow y = 3\tfrac{19}{23} \end{array}$$

Berarti, koordinat titik B adalah $B\left(1\frac{13}{23}, 3\frac{19}{23}\right)$.

Titik C adalah perpotongan garis $6x + 8y = 40$ dan $x + 4y = 12$. Koordinat titik C dapat ditentukan dengan metode eliminasi sebagai berikut.

$$\begin{array}{l|l} 6x + 8y = 40 & \times\ 1 \rightarrow 6x + 8y = 40 \\ x + 4y\ = 12 & \times\ 2 \rightarrow \underline{2x + 8y = 24}\ - \\ & \qquad\quad 4x \qquad = 16 \Leftrightarrow x = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 8y = 40 & \times\ 1 \rightarrow 6x + 8y\ \ = 40 \\ x + 4y\ = 12 & \times\ 6 \rightarrow \underline{6x + 24y = 72}\ - \\ & \qquad\quad -16y = -32 \Leftrightarrow y = 2 \end{array}$$

Berarti, koordinat titik C adalah $C(4, 2)$.

Dari **Gambar 1.11**, nilai minimum dari fungsi objektif $z = 1.000x + 1.500y$ dicapai pada titik $C(4, 2)$ sehingga nilai minimum dari $z = 1.000x + 1.500y = 1.000(4) + 1.500(2) = 4.000 + 3.000 = 7.000$.

Jadi, banyaknya uang minimum yang harus disediakan oleh pasien tersebut adalah Rp7.000,00 setiap hari dengan mengonsumsi 4 kapsul jenis I dan 2 kapsul jenis II.

Soal Terbuka

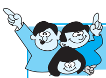
Kerjakan di buku tugas

Tentukan nilai maksimum fungsi sasaran $z = 500x + 400y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan berikut.

$2x + 3y \leq 2.500$

$x + 7y \leq 4.000$

$x \geq 0, y \geq 0$



Diskusi — Mengomunikasikan Gagasan

Dalam setiap pengerjaan masalah optimasi, mengapa selalu digunakan titik-titik sudut untuk menentukan nilai optimasinya (maksimum atau minimumnya)? Jelaskan menurut pendapat kalian.

Jika koordinat titik optimum tidak bulat, sedangkan titik optimum yang diminta berupa bilangan bulat, perlu diselidiki titik-titik bulat di sekitar titik optimum yang termasuk dalam daerah penyelesaian.

Contoh:

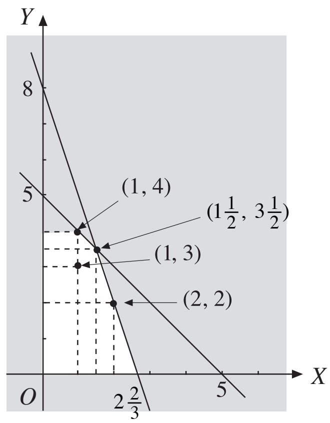
Tentukan nilai maksimum dari fungsi objektif $z = 15x + 10y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 3x + y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

Penyelesaian:

Titik potong garis $x + y = 5$ dan $3x + y = 8$ adalah $\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$. Jika x dan y bilangan real, nilai maksimum fungsi $z = 15x + 10y$ dicapai pada titik $\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$. Oleh karena itu, perlu diselidiki titik-titik bulat di sekitar $\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ dan termasuk dalam daerah penyelesaian, yaitu titik (1, 4), (1, 3), dan (2, 2).

- Untuk titik (1, 4)
  $z = 15x + 10y = 15(1) + 10(4) = 55$
- Untuk titik (1, 3)
  $z = 15x + 10y = 15(1) + 10(3) = 45$
- Untuk titik (2, 2)
  $z = 15x + 10y = 15(2) + 10(2) = 50$



Gambar 1.12

Berarti, nilai maksimum fungsi z dicapai pada titik bulat (1, 4), yaitu $z = 55$.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan metode uji titik sudut, tentukan titik optimum (x, y) dan nilai optimum fungsi objektif dari program linear berikut.
   a. Sistem pertidaksamaan linear:
   $$\begin{cases} 2x + 5y \leq 40 \\ 4x + y \leq 20 \\ 10 + 5y \leq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$
   Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 24x + 8y$

   b. Sistem pertidaksamaan linear:
   $$\begin{cases} 2x + 3y \geq 40 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 8x + 2y \geq 32 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$
   Fungsi objektif: meminimumkan $z = 3x + 4y$

c. Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 4x + 2y \geq 20 \\ 2x + y \geq 14 \\ x + 6y \geq 18 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: meminimumkan $z = 4x + 2y$

2. Dengan metode garis selidik, tentukan nilai optimum fungsi objektif dari program linear berikut.

   a. Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 2x + 6y \leq 36 \\ 5x + 3y \leq 30 \\ 8x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

   Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 40x + 50y$

   b. Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 15 \\ x + 5y \geq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

3. Seekor hewan pemakan serangga setiap hari paling sedikit memerlukan 10 unit makanan *A*, 12 unit makanan *B*, dan 12 unit makanan *C*. Untuk memenuhi kebutuhannya, hewan tersebut memakan 2 jenis serangga. Serangga jenis I memberikan masing-masing makanan *A*, *B*, dan *C* sebanyak 5, 2, dan 1 unit setiap ekor. Serangga jenis II memberikan masing-masing makanan *A*, *B*, dan *C* sebanyak 1, 2, dan 4 unit setiap ekor. Untuk menangkap serangga jenis I, hewan tersebut mengeluarkan 3 unit energi, sedangkan untuk menangkap serangga jenis II dikeluarkan 2 unit energi. Berapa ekor jenis serangga masing-masing harus ditangkap hewan tersebut untuk memenuhi kebutuhan makanan dengan mengeluarkan energi minimum?
4. Suatu pabrik baja memproduksi dua tipe baja yang diberi kode baja B_1 dan B_2. Baja B_1 memerlukan 2 jam untuk melebur, 4 jam untuk menggiling, dan 10 jam untuk memotong. Baja B_2 memerlukan 5 jam untuk melebur, 1 jam untuk menggiling, dan 5 jam untuk memotong. Waktu yang tersedia untuk melebur, menggiling, dan memotong masing-masing adalah 40 jam, 20 jam, dan 60 jam. Keuntungan setiap potong baja B_1 dan baja B_2 masing-masing adalah Rp240.000,00 dan Rp80.000,00. Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh.
5. Suatu perusahaan batu kerikil untuk halaman rumah memproduksi dua macam batu kerikil, yaitu kasar dan halus. Batu kerikil kasar memerlukan waktu 2 jam untuk menghancurkan, 5 jam untuk mengayak, dan 8 jam untuk mengeringkan. Batu kerikil yang halus memerlukan waktu 6 jam untuk menghancurkan, 3 jam

untuk mengayak, dan 2 jam untuk mengeringkan. Keuntungan dari masing-masing batu kerikil itu adalah Rp40.000,00 untuk yang kasar dan Rp50.000,00 untuk yang halus. Suatu pesanan dikerjakan perusahaan itu dengan alokasi waktu 36 jam untuk menghancurkan, 30 jam untuk mengayak, dan 40 jam untuk mengeringkan. Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh.

6. Suatu pabrik menghasilkan dua macam barang, yaitu *A* dan *B*. Masing-masing barang diproses melalui dua mesin. Setiap unit barang *A* diproses selama 4 menit di mesin I dan II, sedangkan setiap unit barang *B* diproses selama 2 menit di mesin I dan 4 menit di mesin II. Kapasitas pengoperasian mesin I dan mesin II masing-masing 600 menit dan 480 menit. Dari setiap penjualan satu unit barang A diperoleh laba Rp8.000,00, sedangkan dari penjualan satu unit barang B diperoleh laba Rp6.000,00. Nyatakan komposisi penjualan barang *A* dan *B* yang akan memaksimumkan laba dan tentukan laba maksimumnya.

7. Seorang peternak merasa perlu memberi makanan yang mengandung paling sedikit 27, 21, dan 30 satuan unsur nutrisi *A*, *B*, dan *C* setiap hari kepada ternaknya. Untuk itu, ada dua jenis makanan, yaitu *M* dan *N* yang dapat diberikan kepada ternak tersebut. Satu pon (500 g) jenis makanan *M* mengandung *A*, *B*, dan *C* masing-masing sebesar 3, 1, dan 2 satuan. Satu pon jenis makanan *N* mengandung nutrisi *A*, *B*, dan *C* masing-masing 1, 1, dan 2 satuan. Harga satu pon makanan *M* dan *N* masing-masing sebesar Rp4.000,00 dan Rp2.000,00. Tentukan komposisi kedua jenis makanan tersebut yang meminimumkan pengeluaran serta besarnya pengeluaran minimum peternak tersebut.

8. Suatu pabrik alat-alat pertanian memproduksi dua jenis pompa air. Setiap jenis pompa air harus melalui tiga tahap dalam perakitan. Waktu yang diperlukan dan waktu yang tersedia dalam setiap tahap diperlihatkan dalam tabel berikut.

Tabel 1.18

Perakitan / **Jenis Pompa Air**	**Tahap I**	**Tahap II**	**Tahap III**
Jenis I	40 jam	24 jam	20 jam
Jenis II	30 jam	32 jam	24 jam
Waktu yang Tersedia	480 jam	480 jam	480 jam

Keuntungan setiap unit pompa air jenis I dan II masing-masing adalah Rp30.000,00 dan Rp50.000,00. Tentukan keuntungan maksimum dan jumlah produksi kedua jenis pompa tersebut agar diperoleh keuntungan maksimum.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Seorang ahli elektronik merakit alat-alat *stereo-set* yang akan dijual di tokonya. Ia merangkai dua macam produk, yaitu piringan hitam dan pesawat kaset. Dari hasil penjualan piringan hitam, ia memperoleh laba Rp3.000,00 setiap unit

dan dari penjualan pesawat kaset Rp4.500,00 setiap unit. Kedua produk itu harus melalui dua tahap perakitan dan ruang uji. Satu piringan hitam memerlukan 12 jam untuk merakit dan 4 jam untuk menguji, sedangkan pesawat kaset memerlukan 4 jam untuk merakit dan 8 jam untuk menguji. Berdasarkan jadwal setiap bulan, waktu yang tersedia adalah 60 jam untuk merakit dan 40 jam untuk menguji. Tentukan kombinasi terbaik untuk kedua macam produk tersebut agar menghasilkan keuntungan maksimum (terbesar). Tentukan pula besar keuntungan maksimum.

2. Suatu perusahaan alat rumah tangga memproduksi lemari buku dan meja bagi keperluan pelajar. Penjualan setiap lemari buku memberikan laba Rp5.000,00 dan Rp7.500,00 untuk meja. Setiap produk itu melalui dua tahap pengerjaan, yaitu memotong dan merakit. Satu lemari buku memerlukan waktu 4 jam pemotongan dan 4 jam untuk merakit, sedangkan satu meja memerlukan waktu 3 jam pemotongan dan 5 jam untuk merakit. Jika perusahaan menyediakan waktu 40 jam untuk pemotongan dan 30 jam untuk merakit, berapakah laba maksimum dari kedua produk tersebut? Berapa banyak meja dan lemari buku yang harus diproduksi agar diperoleh laba maksimum?

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Agar wawasan kalian bertambah, cobalah cari informasi-informasi yang berkaitan dengan *software* untuk menyelesaikan kasus program linear di media-media yang ada di sekitarmu (perpustakaan, buku-buku referensi, maupun internet). Pelajarilah cara penggunaannya.

Refleksi

Setelah mempelajari materi program linear, tentunya kalian memahami bagaimana cara menerjemahkan persoalan (kasus) sehari-hari ke dalam matematika, untuk kemudian menyelesaikannya. Coba cari contoh kasus yang sesuai dengan materi ini, kemudian terjemahkan dalam bahasa matematika dan selesaikan. Keistimewaan apa yang kamu peroleh setelah mempelajari bab ini?

Rangkuman

1. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem (gabungan dua atau lebih) pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel.
2. Program linear digunakan untuk memecahkan masalah optimasi.

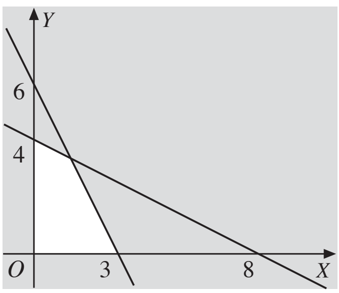
3. Model matematika berupa persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi yang diperoleh dari hasil penafsiran atau terjemahan suatu masalah program linear ke dalam bahasa matematika.
4. Untuk memecahkan permasalahan model matematika, hal yang utama adalah memisalkan variabel-variabel dari permasalahannya ke dalam simbol-simbol matematika.
5. Fungsi objektif adalah suatu fungsi yang hendak ditentukan nilai optimumnya pada program linear. Nilai optimum bentuk objektif dapat ditentukan, antara lain dengan
   a. metode uji titik sudut;
   b. metode garis selidik.

Latihan Ulangan Harian I

Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Daerah yang tidak diarsir pada gambar berikut memenuhi sistem pertidaksamaan ....



a. $\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ 3x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

2. Nilai maksimum fungsi $z = 400x + 300y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan
$\begin{cases} 5x + 2y \leq 30 \\ 2x + 4y \leq 28 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ adalah ....
   a. 3.000   d. 3.300
   b. 3.100   e. 3.400
   c. 3.200
3. Jika $A = x + y$ dan $B = 5x + y$, nilai maksimum A dan B yang memenuhi sistem pertidaksamaan
$\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ 2x + y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ berturut-turut adalah ....
   a. 8 dan 30   d. 30 dan 6
   b. 6 dan 6   e. 8 dan 24
   c. 6 dan 24
4. Untuk memproduksi barang A, diperlukan waktu 6 jam pada mesin I dan 4 jam pada mesin II, sedangkan untuk memproduksi barang B, diperlukan waktu 2 jam pada mesin I dan 8 jam pada mesin II. Kedua mesin tersebut setiap hari bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari diproduksi x buah barang A dan y buah barang B, model matematika yang sesuai untuk kasus di atas adalah ....

a. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 9 \\ 4x + y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 2y \leq 9 \\ 2x + 4y \leq 9 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ 2x + 4y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ 4x + 2y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x + 3y \leq 9 \\ x + 2y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

5. Luas area parkir adalah 176 m^2. Luas rata-rata mobil sedan dan bus masing-masing 4 m^2 dan 20 m^2. Area parkir tersebut hanya mampu menampung 20 kendaraan, dengan biaya parkir untuk mobil dan bus masing-masing Rp1.000,00 per jam dan Rp2.000,00 per jam. Jika dalam waktu 1 jam tidak ada kendaraan yang pergi atau datang, hasil maksimum area parkir tersebut adalah ....

a. Rp20.000,00 d. Rp34.000,00
b. Rp26.000,00 e. Rp44.000,00
c. Rp30.000,00

6. Diketahui sistem pertidaksamaan berikut.

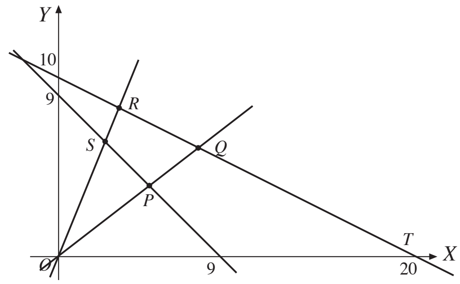
$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x + y \geq 3 \\ 2 \leq x \leq 4, y \geq 0 \end{cases}$

Nilai maksimum fungsi sasaran $z = 3x + 2y$ adalah ....

a. 10 d. 16
b. 12 e. 18
c. 14

7. Diketahui sistem pertidaksamaan berikut.

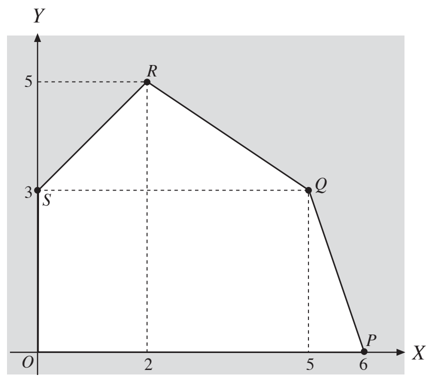
$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ x + y \geq 9 \\ x \leq 2y \\ 2x \geq y \end{cases}$



Nilai maksimum fungsi sasaran $z = 3y - x$ terletak di titik ....

a. P d. S
b. Q e. T
c. R

8. Perhatikan gambar berikut.



Jika daerah segi lima tersebut merupakan himpunan penyelesaian dari suatu program linear, fungsi sasaran $z = x + 3y$ mencapai maksimum di titik ....

a. P d. S
b. Q e. O
c. R

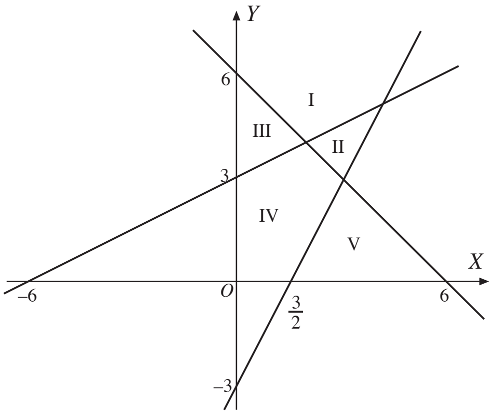
9. Nilai minimum $z = x + y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan

$\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ 4x + 3y \leq 12 \end{cases}$

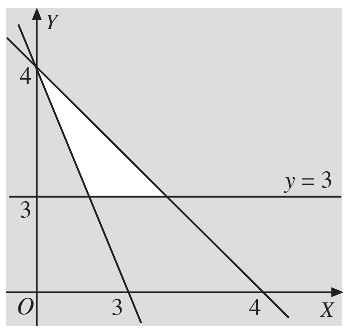
adalah ....

a. $1\frac{4}{5}$ d. $2\frac{4}{5}$
b. $2\frac{1}{5}$ e. $3\frac{1}{5}$
c. $2\frac{3}{5}$

10. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu jenis *A* sekurang-kurangnya 100 pasang dan jenis sepatu *B* sekurang-kurangnya 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan yang diperoleh per pasang sepatu jenis *A* adalah Rp10.000,00 dan Rp5.000,00 untuk jenis *B*. Jika banyak sepatu jenis *A* tidak boleh melebihi 150 pasang, keuntungan terbesar yang dapat diperoleh toko tersebut adalah ...
    a. Rp2.750.000,00
    b. Rp3.000.000,00
    c. Rp3.250.000,00
    d. Rp3.500.000,00
    e. Rp3.750.000,00
11. Daerah yang memenuhi penyelesaian sistem pertidaksamaan
    $$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \leq 3 \\ x - 2y + 6 \leq 0 \end{cases}$$
    adalah ....

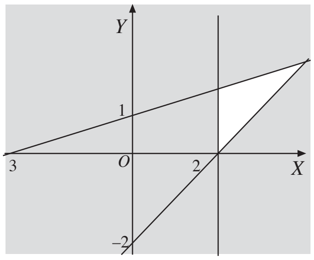


    a. I
    b. II
    c. III
    d. IV
    e. V
12. Seorang pedagang arloji membeli arloji merek *A* seharga Rp60.000,00 dan merek *B* seharga Rp240.000,00. Tas pedagang tersebut hanya mampu memuat tidak lebih dari 30 arloji. Modal pedagang tersebut sebesar Rp3.600.000,00. Jika keuntungan arloji merek *A* adalah Rp25.000,00 dan keuntungan arloji merek *B* adalah Rp75.000,00, jumlah keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pedagang itu adalah ....
    a. Rp750.000,00
    b. Rp1.125.000,00
    c. Rp1.250.000,00
    d. Rp2.250.000,00
    e. Rp2.275.000,00
13. Nilai maksimum fungsi $z = 4x + 5y$, dengan syarat $x, y \geq 0$, $x + 2y \leq 10$, dan $x + y \leq 7$ adalah ....
    a. 34
    b. 33
    c. 32
    d. 31
    e. 30
14. Daerah yang tidak diarsir pada gambar berikut memenuhi sistem pertidaksamaan ....



    a. $\begin{cases} 4x + 3y \geq 12 \\ 4x + 4y \leq 16 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}$
    b. $\begin{cases} 4x + 3y \geq 12 \\ 4x + 4y \leq 16 \\ y \geq 3 \end{cases}$
    c. $\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ x + y \leq 4 \\ x \leq 3, y \geq 3 \end{cases}$
    d. $\begin{cases} 3x + 3y \leq 16 \\ 4x + 3y \leq 12 \\ y \geq 3 \end{cases}$
    e. $\begin{cases} 4x + 4y \leq 16 \\ 4x + 3y \leq 12 \\ y \geq 3 \end{cases}$

15. Perhatikan gambar berikut.



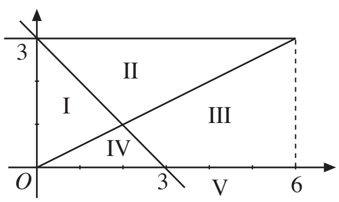
Jika daerah yang tidak diarsir adalah himpunan penyelesaian dari suatu program linear, nilai maksimum fungsi sasaran $z = x - y$ terletak pada titik ....

a. (3, 1)
b. (4, 1)
c. $\left(2, \frac{5}{3}\right)$
d. (3, 2)
e. $\left(4, \frac{5}{2}\right)$

16. Penyelesaian sistem pertidaksamaan linear

$$\begin{cases} y - 3 < 0 \\ x - 2y < 0 \\ x + y > 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

pada gambar di bawah adalah ....



a. I
b. II
c. III
d. IV
e. V

17. Seorang anak diharuskan mengonsumsi dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari, anak itu memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet pertama Rp400,00 per biji dan tablet kedua Rp800,00 per biji, pengeluaran minimum untuk membeli tablet per hari adalah ....

a. Rp1.200,00
b. Rp1.400,00
c. Rp1.600,00
d. Rp1.800,00
e. Rp2.000,00

18. Jika $z = x + 2y$ adalah fungsi sasaran untuk sistem pertidaksamaan linear

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 5x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

nilai maksimum z adalah ....

a. 3
b. 7
c. 11
d. 16
e. tidak ada

19. Dalam himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ x + y \leq 6 \\ 2x + 3y \leq 15, \end{cases}$$

nilai minimum dari $3x + 4y$ adalah ....

a. 9
b. 10
c. 11
d. 12
e. 13

20. Nilai maksimum dari $x + y - 6$ yang memenuhi syarat $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 8y \leq 340$, dan $7x + 4y \leq 280$ adalah ....

a. 52
b. 51
c. 50
d. 49
e. 48

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

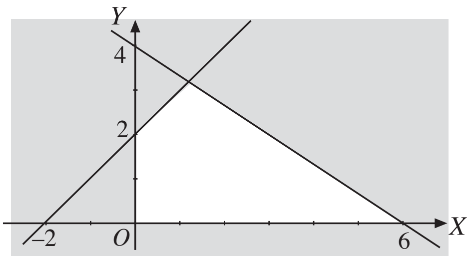
1. Gambarlah daerah yang menunjukkan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut.

$$\begin{cases} 7x + 5y \geq 35 \\ 2x + 9y \geq 18 \\ x \leq 9, y \leq 5 \end{cases}$$

2. Tentukan nilai maksimum fungsi sasaran z = $40x + 10y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3. Perhatikan gambar berikut.



Tentukan sistem pertidaksamaan linear yang himpunan penyelesaiannya ditunjukkan oleh daerah yang tidak diarsir (bersih).

4. Untuk membuat satu paket roti *A*, diperlukan 50 gram mentega dan 60 gram tepung, sedangkan satu paket roti *B* memerlukan 100 gram mentega dan 20 gram tepung. Jika tersedia 3,5 kilogram mentega dan 2,2 kilogram tepung, tentukan
   a. model matematikanya;
   b. banyaknya masing-masing roti maksimum yang dapat dibuat.

5. Berdasarkan soal nomor 4, jika harga satu paket roti *A* dan *B* masing-masing Rp20.000,00 dan Rp25.000,00, tentukan jumlah uang maksimum yang diperoleh dari penjualan roti tersebut.

Bab II

Matriks

Sumber: *Ensiklopedia Pelajar,* 1999

Motivasi

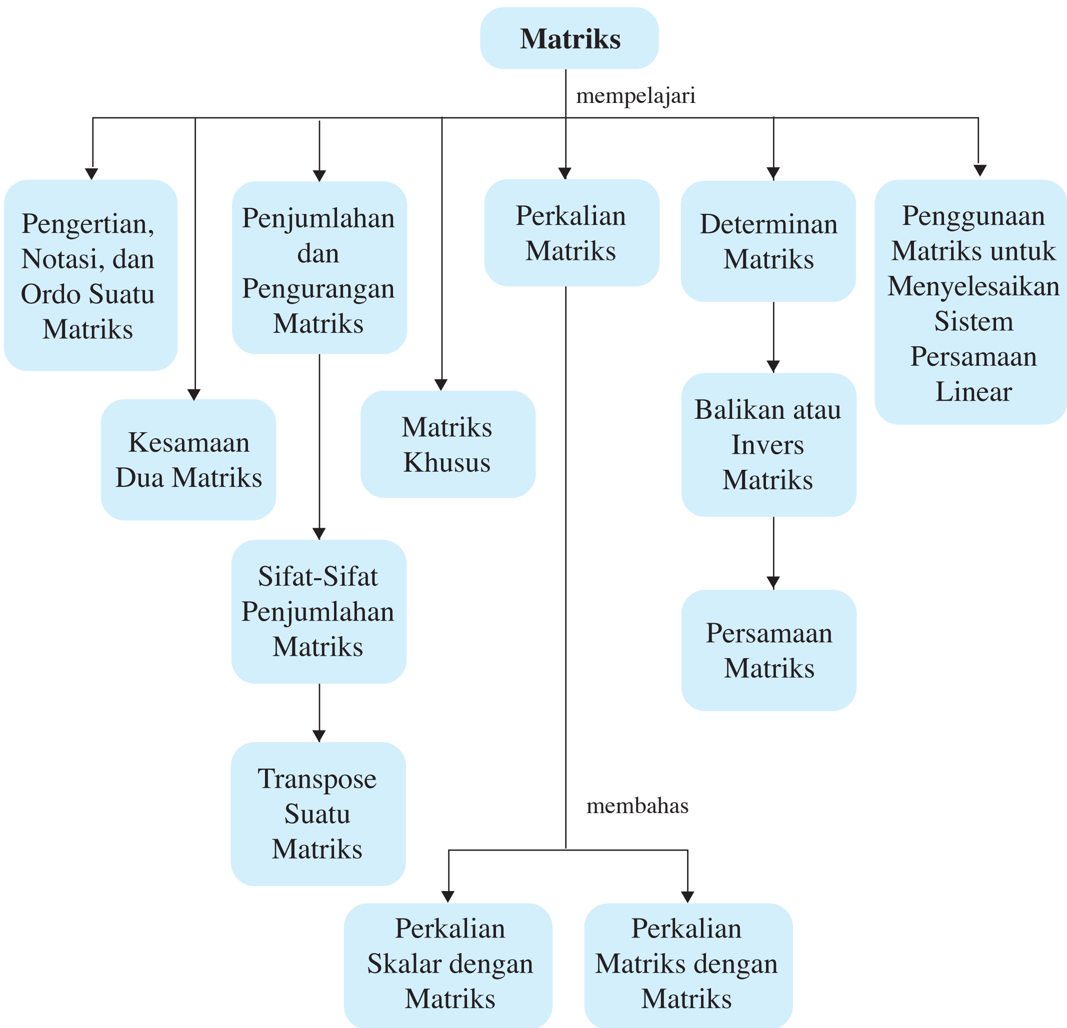
Secara umum matriks merupakan suatu daftar yang berisi angka-angka dan ditulis di dalam tanda kurung. Daftar-daftar yang dapat ditulis dalam bentuk matriks, misalnya perolehan medali dalam suatu permainan olahraga, daftar gaji pegawai, dan daftar nilai siswa.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menjelaskan ciri suatu matriks;
2. menuliskan informasi dalam bentuk matriks;
3. melakukan operasi aljabar atas dua matriks;
4. menentukan determinan matriks persegi ordo 2 dan kaitannya dengan matriks mempunyai invers;
5. menentukan invers matriks persegi ordo 2;
6. membuktikan rumus invers matriks ordo 2;
7. menjelaskan sifat-sifat operasi matriks;
8. menjelaskan sifat-sifat matriks yang digunakan dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan linear;
9. menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan invers matriks;
10. menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan determinan.

Peta Konsep

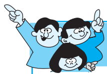


Kata Kunci

- elemen matriks
- matriks
- matriks baris
- matriks diagonal
- matriks identitas
- matriks kolom
- matriks nol
- ordo
- *transpose*

Matriks merupakan bentuk penulisan yang sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, yaitu berupa isi di setiap baris dan kolomnya. Misalnya, pada daftar gaji pegawai, data absensi siswa, dan daftar nilai siswa. Pembahasan matriks pada bab ini meliputi pengertian, notasi, dan ordo suatu matriks, kesamaan dua matriks, penjumlahan dan pengurangan matriks, perkalian bilangan real (skalar) dengan matriks, perkalian matriks, balikan atau invers matriks, dan penggunaan matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel.

Sebelum lebih jauh mempelajari bab ini, coba jawablah soal berikut.



Uji Prasyarat — *Kerjakan di buku tugas*

Diketahui sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$ax + by + cz = p$

$dx + ey + fz = q$

$gx + hy + iz = r$

Susunlah koefisien-koefisien pada sistem persamaan itu dalam tabel berikut.

Tabel 2.1

	Koefisien x	Koefisien y	Koefisien z
Persamaan 1	....	....	....
Persamaan 2	....	....	....
Persamaan 3	....	....	....

Jelaskan arti (makna) angka-angka (elemen) pada tabel itu.

Setelah kalian mampu menjawab permasalahan di atas, mari kita lanjutkan ke materi berikut.

A. Pengertian Dasar tentang Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak keterangan atau informasi yang disajikan dalam bentuk daftar berisi angka-angka yang disusun menurut baris dan kolom. Misalnya, harga karcis masuk suatu tempat wisata disajikan dalam bentuk daftar seperti berikut.

Tabel 2.2

Pengunjung	Hari Biasa	Hari Minggu
Dewasa	5.000	8.500
Anak-Anak	2.500	3.750

Daftar di depan dapat disusun lebih sederhana dengan menghilangkan judul baris dan judul kolom sehingga tampak sebagai berikut.

5.000	8.500
2.500	3.750

Jika susunan bilangan-bilangan tersebut ditulis di antara dua tanda kurung (bukan kurung kurawal), diperoleh suatu susunan bilangan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 5.000 & 8.500 \\ 2.500 & 3.750 \end{pmatrix}$$

Susunan bilangan yang demikian disebut *matriks*. Secara umum, matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

> *Matriks* adalah susunan berbentuk persegi panjang dari bilangan-bilangan menurut baris dan kolom serta ditempatkan dalam tanda kurung (kurung biasa atau kurung siku).

Pada matriks di atas 8.000 adalah elemen (unsur) matriks pada baris pertama dan kolom pertama, ditulis a_{11} = 5.000. Elemen-elemen yang lain, yaitu 8.500, 2.500, dan 3.750 berturut-turut menunjukkan elemen-elemen matriks pada baris pertama kolom kedua, baris kedua kolom pertama, dan baris kedua kolom kedua. Selanjutnya, ditulis a_{12} = 8.500, a_{21} = 2.500, dan a_{22} = 3.750.

Suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital *A*, *B*, *C*, dan seterusnya. Bilangan-bilangan yang terdapat di dalam matriks dinamakan *elemen matriks*. Adapun bentuk umum matriks *A* yang mempunyai *m* baris dan *n* kolom adalah

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{kolom ke-1} & \text{kolom ke-2} & & \text{kolom ke-}n \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{baris ke-1} \\ \leftarrow \text{baris ke-2} \\ \\ \leftarrow \text{baris ke-}m \end{array}$$

Keterangan:

a_{ij} adalah elemen pada baris ke-*i* kolom ke-*j* matriks *A*.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1j}$ adalah elemen-elemen baris ke-1.

$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{i1}$ adalah elemen-elemen kolom ke-1.

Bentuk umum matriks *A* tersebut ditulis secara singkat menjadi

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

Contoh:

1. Hasil ulangan harian (UH) Matematika dari lima orang siswa adalah sebagai berikut.

Tabel 2.3

No.	Nama Siswa	UH 1	UH 2	UH 3
1.	Anik	6	7	7
2.	Nia	5	6	5
3.	Hesti	8	7	8
4.	Ardi	7	7	8
5.	Danar	6	8	7

a. Susunlah data di atas dalam bentuk matriks dengan notasi A.
b. Berapa banyak baris pada matriks A?
c. Sebutkan elemen-elemen pada baris pertama.
d. Berapa banyak kolom pada matriks A?
e. Sebutkan elemen-elemen pada kolom kedua.

Penyelesaian:

a. $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

b. Banyak baris pada matriks A adalah 5.
c. Elemen-elemen baris pertama adalah 6, 7, dan 7.
d. Banyak kolom pada matriks A adalah 3.
e. Elemen-elemen kolom kedua adalah 7, 6, 7, 7, dan 8.

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Tentukan berikut ini.
a. Elemen-elemen pada baris ke-1.
b. Elemen-elemen kolom ke-3.
c. Elemen pada baris ke-1 kolom ke-3.
d. Elemen pada baris ke-2 kolom ke-1.

Penyelesaian:

a. Elemen-elemen pada baris ke-1 adalah 2, 0, dan 1.
b. Elemen-elemen pada kolom ke-3 adalah 1 dan 2.
c. Elemen pada baris ke-1 kolom ke-3 adalah 1.
d. Elemen pada baris ke-2 kolom ke-1 adalah 4.

1. Ordo Matriks

Jika suatu matriks A mempunyai m baris dan n kolom, dikatakan bahwa ordo matriks A adalah $m \times n$, ditulis dengan notasi $A_{m \times n}$. Perhatikan matriks R dan S di bawah ini.

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks R mempunyai ukuran 3 baris dan 2 kolom sehingga dapat dikatakan bahwa matriks R berordo 3×2 dan ditulis $R_{3 \times 2}$. Adapun matriks S mempunyai 1 baris dan 3 kolom sehingga dikatakan bahwa matriks S berordo 1×3 dan ditulis $S_{1 \times 3}$. Secara umum, ordo suatu matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

Ordo suatu matriks adalah ukuran matriks tersebut yang dinyatakan dengan banyak baris kali banyak kolom.

Tugas Observasi **Kerjakan di buku tugas**

Carilah data tentang jumlah penghuni rumahmu dan susunlah dalam bentuk tabel berikut.

Penghuni	Laki-Laki	Perempuan
Orang tua	....	....
Anak	....	....
PRT	....	....
Famili	....	....

Dari tabel itu, nyatakan dalam sebuah matriks. Ada berapa matriks yang terbentuk? Kemudian, dengan bahasamu sendiri, jelaskan arti angka-angka dari setiap elemen matriks yang terbentuk.

2. Transpose Suatu Matriks

Transpose dari matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dengan cara menukar setiap elemen baris matriks A dengan elemen kolom matriks transposenya. Transpose suatu matriks A ditulis dengan lambang A^t atau A'.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Tentukan transpose dari matriks A dan B.

Penyelesaian:

Berdasarkan pengertian transpose suatu matriks, baris ke-1 matriks A menjadi kolom ke-1 matriks A^t, sedangkan baris ke-2 matriks A menjadi kolom ke-2 matriks A^t. Dengan demikian, diperoleh $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Dengan cara yang sama, jika $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, matriks transposenya adalah $B^t = (-3 \;\; 2 \;\; -5)$.

Tugas Berpikir Kritis **Kerjakan di buku tugas**

Coba cari tahu tentang pengertian matriks simetris. Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan matriks simetris? Mengapa?

3. Matriks-Matriks Khusus

a. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah suatu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Jika banyaknya baris pada matriks persegi A adalah n, banyaknya kolom matriks A juga n sehingga ordo matriks A adalah $n \times n$. Secara singkat, matriks A dapat disebut *matriks persegi ordo n*. Elemen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ disebut *elemen-elemen diagonal utama (pertama)*.

Misalnya:

$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ merupakan matriks persegi ordo 2, dapat ditulis $A_{2\times 2}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ merupakan matriks persegi ordo 3, dapat ditulis $B_{3\times 3}$.

Elemen-elemen diagonal utama pada matriks A adalah p dan s, sedangkan elemen-elemen diagonal utama pada matriks B adalah 1, 5, dan 9.

b. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri atas satu baris.

Misalnya:

$D = (-1 \quad 3)$

$E = (0 \quad 2 \quad -4)$

c. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri atas satu kolom.

Misalnya:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks persegi dengan setiap elemen yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol.

Misalnya:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e. Matriks Satuan

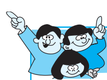
Matriks satuan adalah suatu matriks diagonal dengan setiap elemen diagonal utama adalah 1. Matriks identitas biasanya dilambangkan dengan I atau I_n, untuk n bilangan asli.

Misalnya:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f. Matriks Nol

Matriks nol adalah suatu matriks yang setiap elemennya nol. Matriks nol berordo $m \times n$ dinotasikan dengan $O_{m \times n}$.



Diskusi

Berpikir Kritis

Kalian tentu mengenal matriks persegi ordo 1. Adakah matriks identitas ordo 1? Jika ada, seperti apakah? Jika tidak ada, berikan alasan seperlunya.

Misalnya:

$$O_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ O_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g. Lawan Suatu Matriks

Lawan suatu matriks adalah suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan lawan elemen dari matriks semula. Lawan dari suatu matriks A dinotasikan dengan $-A$.

Misalnya:

Lawan matriks $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -7 & -10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ adalah $-A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Diskusi Mengomunikasikan Gagasan

Menurutmu, apa keunggulan penyajian suatu data dengan menggunakan matriks? Apakah semua jenis data dapat disajikan dengan matriks? Berikan contoh dan alasanmu.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Hasil perolehan medali sementara pada suatu Pekan Olahraga Nasional adalah sebagai berikut.

Tabel 2.4

No.	Kontingen	Emas	Perak	Perunggu
1.	Jawa Timur	18	7	6
2.	Jawa Barat	5	9	7
3.	DKI Jakarta	5	4	8
4.	Lampung	4	5	3
5.	DI Yogyakarta	2	3	2

a. Susunlah data di atas dalam bentuk matriks dengan notasi A.
b. Berapa banyak baris dan kolom pada matriks A?
c. Sebutkan elemen-elemen pada baris keempat.
d. Sebutkan elemen-elemen pada kolom pertama.
e. Sebutkan elemen pada baris kedua kolom ketiga.
f. Sebutkan elemen pada baris kelima kolom pertama.

2. Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Tentukan ordo matriks B.
b. Tentukan elemen baris kedua kolom keempat.
c. Tentukan elemen baris ketiga kolom ketiga.
d. Tentukan transpose matriks B.

3. Tulislah koefisien dan konstanta sistem persamaan linear dua variabel berikut dalam bentuk matriks lengkap, dengan ordo 2×3.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2y - 4x = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x = 0 \\ 3y = 9 \end{cases}$

4. Matriks $A = (a_{ij})$ ditentukan oleh $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Tentukan ordo matriks A.
b. Hitunglah nilai $a_{22} + a_{32}$, $a_{11} - a_{31}$, dan $a_{22} + a_{12}$.
c. Jika $k = a_{21}$, tentukan nilai $k - k^2 + 6$.
d. Tentukan transpose matriks A.

5. Diketahui matriks $B = (b_{ij})$ ditentukan oleh $B = \begin{pmatrix} u & 3 & 1 \\ -2 & v & 4 \end{pmatrix}$.

Tentukan nilai u dan v jika
a. $3b_{11} = 6b_{23}$ dan $2b_{22} = 4b_{21}$;
b. $2b_{11} - 4b_{22} = 6$ dan $b_{22} = b_{13}$.

B. Kesamaan Dua Matriks

Amatilah matriks-matriks A, B, dan C berikut ini.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 1 \\ 0 & 1+2 \end{pmatrix},\ \text{dan } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Apa yang dapat kalian katakan tentang matriks-matriks tersebut? Apakah matriks $A = B$? Apakah $A = C$? Mengapa?

Dari ketiga matriks tersebut, tampak bahwa matriks A = matriks B karena ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak nilainya sama, sedangkan matriks A tidak sama dengan matriks C karena meskipun ordonya sama, tetapi elemen-elemen yang seletak nilainya tidak sama.

Dua matriks A dan B dikatakan sama, ditulis $A = B$ jika kedua matriks itu ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak bernilai sama.

Contoh:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ adalah dua matriks yang sama. Tentukan nilai a, b, dan c.

Penyelesaian:

Diketahui $A = B$, berarti $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, diperoleh

$a = 1$ $\qquad 2 = 3b \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$

$0 = 0$ $\qquad c = 2a \Leftrightarrow c = 2 \times 1 = 2.$

Oleh karena itu, diperoleh $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$, dan $c = 2$

Uji Kompetensi 2 — *Kerjakan di buku tugas*

1. Tentukan nilai x dan y jika diketahui persamaan matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 3x & -5 \\ y & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 5x \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 10x - y - 9 \\ 7x + 2y + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 4y + 10 \\ 2x + 6y + 9 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 6 & 3 - x \\ y + 1 & 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & y \\ 2 & 4x \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} x & -6 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   f. $\begin{pmatrix} x & x + y \\ x - y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

   g. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x & 5 & 2 \\ -6 & \frac{3}{4}y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \end{pmatrix}$

   h. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ x & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2y & 2 \\ 4 & y \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai a, b, dan c jika diketahui persamaan matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 5 & b \\ 7 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + c \\ a - c & -2 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} a - 2 & 4 \\ b + c & a - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 7 & c + 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$

3. Tentukan nilai a dan b jika matriks $P = Q^t$.

a. $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2a & b \end{pmatrix}$

b. $P = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 3a & 2b \\ b+2 & 4 \end{pmatrix}$

c. $P = \begin{pmatrix} -a & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \\ -2 & a+b & 4 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} -3 & 2b & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

C. Operasi pada Matriks dan Sifat-Sifatnya

Seperti halnya pada bilangan, matriks juga dapat dioperasikan. Misalnya, dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan dengan skalar, dan dikalikan dengan matriks dengan aturan tertentu. Namun, matriks tidak dapat dibagi dengan matriks lain.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Jumlah matriks A dan B, ditulis $A + B$ adalah suatu matriks baru C yang elemen-elemennya diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak dari matriks A dan B. Dengan demikian, syarat agar dua matriks atau lebih dapat dijumlahkan adalah *ordo matriks-matriks itu harus sama*.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Diketahui:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Jika C adalah invers dari $(3A + B)$ maka nilai b sama dengan ....

a. 3
b. 4
c. 5
d. 6
e. 7

Soal SPMB, 2003

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan $D = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 3 & 3d \end{pmatrix}$.

Tentukan a. $A + B$; b. $B + C$; c. $C + D$.

Penyelesaian:

a. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+(-2) & -2+(-4) & 4+0 \\ 2+5 & 3+(-1) & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B + C = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tidak dapat dijumlahkan karena ordonya tidak sama.

c. $$C + D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 3 & 3d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a + 2a & b + 0 \\ c + 3 & d + 3d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3a & b \\ c + 3 & 4d \end{pmatrix}$$

Bagaimana dengan pengurangan terhadap matriks? Pengurangan matriks dapat dikerjakan dengan menggunakan sifat seperti pada pengurangan bilangan real, yaitu jika a dan b dua bilangan real maka $a - b = a + (-b)$. Oleh karena itu, untuk dua matriks A dan B, berlaku

$$A - B = A + (-B)$$

dengan $-B$ adalah lawan matriks B. Syarat pengurangan matriks adalah ordo kedua matriks itu harus sama.

Contoh:

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Tentukan $A - B$.

   Penyelesaian:

   $$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Carilah matriks X jika $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

   Penyelesaian:

   $$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sifat-Sifat Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Untuk mendapatkan sifat-sifat penjumlahan matriks, lakukan kegiatan berikut.

Kegiatan Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Menyelidiki sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan dan pengurangan matriks.

Permasalahan:
Sifat apakah yang berlaku pada operasi penjumlahan dan pengurangan matriks?

Langkah-Langkah:
Kerjakan persoalan-persoalan berikut.

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, dan

   $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   Selidiki hasil penjumlahan berikut ini, kemudian simpulkan.
   a. $A + B$
   b. $B + A$
   c. $(A + B) + C$
   d. $A + (B + C)$
2. Diketahui $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

   Apakah $O + P = P + O$?
3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ dan $-A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan
   a. $A + (-A)$;
   b. $-A + A$;
   c. Apakah $A + (-A) = -A + A$?

Kesimpulan:
Dari soal 1, 2, dan 3 kalian akan memperoleh sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan matriks.

Jika melakukan kegiatan di atas dengan benar, kalian akan memperoleh sifat-sifat berikut.

Jika A, B, dan C adalah matriks-matriks yang berordo sama, pada penjumlahan matriks berlaku sifat-sifat berikut:

a. komutatif sehingga $A + B = B + A$;

b. asosiatif sehingga $(A + B) + C = A + (B + C)$;

c. unsur identitasnya O sehingga $A + O = O + A = A$;

d. invers penjumlahan A adalah $-A$ sehingga $A + (-A) = -A + A = O$.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Sifat-sifat di atas dapat kalian buktikan dengan mudah. Coba kalian buktikan sifat-sifat di atas dengan mengambil matriks $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, dan $O = (o_{ij})$, untuk $o_{ij} = 0$. Ingat matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dapat ditulis $A = (a_{ij})$;

$i = 1, 2, ..., m$

$j = 1, 2, ..., n$

Apakah pada pengurangan matriks berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif? Adakah unsur identitasnya? Coba kalian selidiki dengan mengambil beberapa matriks yang dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Kemukakan hasilnya.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil operasi berikut.

   a. $A + B$

   b. $A + C - B$

   c. $A - (B + C)$

   d. $(A - B) + (B - C)$

   e. $C - B - A$

   f. $-B - C - (A + B)$

2. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil operasi berikut.

   a. $P + Q^t$

   b. $R^t - P + Q$

   c. $P^t + (Q^t - R)$

   d. $(R - P) - Q^t$

   e. $(P + R) - (Q + Q^t)$

   f. $(P - P^t) + (R - R^t)$

3. Diketahui $U = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ dan $V = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Tentukan hasil operasi berikut.

a. $(U + V)^t$

b. $U^t + V^t$

c. $(U - V)^t$

d. $U^t - V^t$

4. Tentukan matriks A yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

b. $A + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$

5. Tentukan nilai x, y, dan z yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} -1 & y \\ x & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & z \\ y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

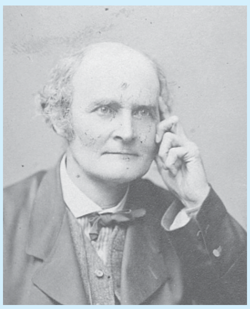
b. $\begin{pmatrix} x & z \\ y & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 1 \\ -3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ x & z \end{pmatrix}$

6. Tentukan nilai a, b, dan c yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} 6 & b & 3 \\ c & a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & c & a \\ 1 & 7 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ b & -5 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -b \\ a & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 3 \\ c & c \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & b \\ -2 & -5 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

Info Math: Informasi Lebih Lanjut



Arthur Cayley
(1821–1895)

Sumber: *www.myscienceblog.com*

Arthur Cayley

Arthur Cayley (1821–1895), pencetus perhitungan matriks, ini mengembangkan matriks pada tahun 1857. Seperti yang telah diketahui banyak orang, dalam matriks banyak sekali istilah-istilah yang mewakili suatu operasi tertentu, di antaranya adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian, determinan, invers, dan transpose. Matriks sangat diminati karena penyajian data atau informasi numerikal dengan cara ini sangat efisien. Dalam matematika sendiri, matriks menjadi suatu alat yang sangat fleksibel, dinamis, dan hampir semua bidang kajian matematis dapat menerapkan matriks.

Sumber: *www.myscienceblog.com*

3. Perkalian Suatu Skalar dengan Matriks

Kita telah mengetahui bahwa penjumlahan bilangan real (skalar) secara berulang dapat dinyatakan sebagai suatu perkalian. Misalnya, $a + a = 2a$, $a + a + a = 3a$, dan seterusnya. Hal tersebut berlaku juga pada operasi matriks. Misalkan diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu, $A + A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2A.$

Jadi, perkalian matriks A dengan suatu bilangan asli k adalah penjumlahan berulang matriks A sebanyak k kali. Dengan kata lain, pengertian ini dapat ditulis sebagai berikut. Jika k bilangan real dan A matriks berordo $m \times n$ maka kA didefinisikan dengan

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Tentukan

a. $2A + 5B$;

b. $3A - 2B$.

Penyelesaian:

a. $$\begin{aligned} 2A + 5B &= 2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -10 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 25 & 35 \\ -15 & 20 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 19 & 39 \\ -25 & 24 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3A - 2B &= 3A + (-2B) \\ &= 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \left(-2\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ -15 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 & -14 \\ 6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -19 & -8 \\ -9 & -2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Sifat-Sifat Perkalian Skalar

Jika A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$, sedangkan k_1 dan k_2 adalah skalar, berlaku sifat-sifat berikut.

a. $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
b. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
c. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Jika A matriks persegi maka berlaku

d. $I \times A = A \times I = A$
e. $(-I)A = -A$

Matriks identitas I merupakan matriks persegi.

Bukti:

Pembuktian sifat-sifat di atas sangat mudah. Untuk itu, di sini akan dibuktikan sifat a saja. Selebihnya dapat kalian kerjakan sebagai bahan latihan.

Misalkan k_1 skalar,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$k_1(A + B) = k_1 \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \right]$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1(a_{11} + b_{11}) & k_1(a_{12} + b_{12}) & \cdots & k_1(a_{1n} + b_{1n}) \\ k_1(a_{21} + b_{21}) & k_1(a_{22} + b_{22}) & \cdots & k_1(a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1(a_{m1} + b_{m1}) & k_1(a_{m2} + b_{m2}) & \cdots & k_1(a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1a_{11} + k_1b_{11} & k_1a_{12} + k_1b_{12} & \cdots & k_1a_{1n} + k_1b_{1n} \\ k_1a_{21} + k_1b_{21} & k_1a_{22} + k_1b_{22} & \cdots & k_1a_{2n} + k_1b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1a_{m1} + k_1b_{m1} & k_1a_{m2} + k_1b_{m2} & \cdots & k_1a_{mn} + k_1b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} & \dots & k_1a_{1n} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} & \dots & k_1a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_1a_{m1} & k_1a_{m2} & \dots & k_1a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1b_{11} & k_1b_{12} & \dots & k_1b_{1n} \\ k_1b_{21} & k_1b_{22} & \dots & k_1b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_1b_{m1} & k_1b_{m2} & \dots & k_1b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$= k_1 A + k_1 B$ .... (terbukti)

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil perkalian skalar berikut.

   a. $3P$
   b. $-2P$
   c. $-2P^t$
   d. $5P^t$

2. Jika $Q = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$, tentukan hasil perkalian skalar berikut.

   a. $4Q$
   b. $-\frac{1}{2}Q^t$
   c. $\frac{1}{2}(Q + Q^t)$
   d. $\frac{1}{2}(5(Q + Q^t))$

3. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $4X = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$
   b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix} = X$
   c. $\frac{1}{3}X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \\ -15 & -3 \end{pmatrix}$
   d. $2\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = X$

4. Tentukan matriks A yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $2A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 8 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$
   b. $3A^t = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 3 & 12 & -9 \end{pmatrix}$
   c. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix} = A^t$
   d. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix} = A^t$

5. Tentukan nilai a, b, c, dan d yang memenuhi persamaan berikut.

a. $5\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ c & d \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ d & 1 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -d & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

d. $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ 16 & b \end{pmatrix}$

5. Perkalian Antarmatriks

Suatu ketika Rini dan Nita membeli alat tulis di koperasi sekolah. Rini membeli 3 buku tulis dan sebatang pensil, sedangkan Nita membeli 2 buku tulis dan 2 pensil. Harga sebuah buku tulis adalah Rp1.000,00 dan harga satu pensil Rp500,00. Berapakah jumlah uang yang harus dibayar Rini dan Nita?

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas, kita dapat langsung mengalikan jumlah barang yang dibeli dengan harga satuan. Jumlah uang yang harus dibayar Rini adalah
$(3 \times 1.000) + (1 \times 500) = 3.500$,
sedangkan jumlah uang yang harus dibayar Nita adalah
$(2 \times 1.000) + (2 \times 500) = 3.000$.
Di samping itu, persoalan di atas dapat disajikan dalam bentuk tabel seperti terlihat berikut ini.

Tabel 2.5
Pembelian Barang

	Buku Tulis	Pensil
Rini	3	1
Nita	2	2

Tabel 2.6
Daftar Harga Barang

Nama Barang	Harga Satuan
Buku tulis	1.000
Pensil	500

Jika keperluan Rini kita tulis dalam bentuk matriks baris dan harga satuan barang dalam bentuk matriks kolom, jumlah uang yang harus dibayar Rini dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks berikut.

$$(3 \times 1.000) + (1 \times 500) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \end{pmatrix} = 3.500$$

Dengan cara yang sama, jumlah uang yang harus dibayar Nita dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks.

$$(2 \times 1.000) + (2 \times 500) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \end{pmatrix} = 3.000$$

Hasil perhitungan di atas diperoleh dengan cara mengalikan setiap elemen matriks berordo 1×2 dengan matriks berordo 2×1 yang hasilnya adalah matriks baru berordo 1×1. Untuk mudah dalam mengingatnya, perhatikan bagan berikut.

Ordo hasil kali

$$\underbrace{(1 \times 2)(2 \times 1)}_{\text{sama}} = (1 \times 1)$$

Jika matriks $A = (a \quad b)$ dikalikan dengan matriks $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$,

hasilnya adalah $A \times B = (a \quad b)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (ap + bq)$.

Oleh karena itu, jumlah uang yang harus dibayar Rini dan Nita dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \times 1.000) + (1 \times 500) \\ (2 \times 1.000) + (2 \times 500) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.500 \\ 3.000 \end{pmatrix}$$

Pada perkalian matriks di atas, matriks yang dikalikan (matriks yang terletak di sebelah kiri) berordo 2 × 2, matriks pengalinya (matriks yang terletak di sebelah kanan) berordo 2 × 1.

Ordo hasil kali

$$\underbrace{(2 \times 2)(2 \times 1)}_{\text{sama}} = (2 \times 1)$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ p & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0$$

mempunyai akar positif x_1 dan x_2. Jika $x_1 = 4x_2$ maka konstanta p =

a. –6
b. –4
c. –2
d. 4
e. 6

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2006

a. Perkalian Matriks Ordo *m* x *q* dengan Matriks Ordo *q* x *n*

Berdasarkan uraian di atas, syarat agar dua matriks A dan B dapat dikalikan adalah banyak kolom matriks A harus sama dengan banyak baris matriks B. Adapun cara mengalikan kedua matriks itu adalah sebagai berikut.

Jika A adalah matriks berordo $m \times q$ dan B adalah matriks berordo $q \times n$, maka $A \times B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ berordo $m \times n$ yang elemen-elemennya diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen-elemen pada baris ke-i matriks A dengan elemen-elemen pada kolom ke-j matriks B yang bersesuaian, dengan $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$$

maka $a + b$ = ...

a. 5
b. 4
c. 3
d. 2
e. 1

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2001

Contoh:

Diketahui $A = (2\ \ 3)$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, dan $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil perkalian matriks berikut.

a. $A \times B$ b. $C \times D$ c. $D \times C$

Penyelesaian:

a. $A \times B = (2\ \ 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = ((2 \times (-2) + 3 \times 5)) = (11)$

b. $C \times D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ tidak dapat dikalikan karena banyak kolom matriks C tidak sama dengan banyak baris matriks D.

c. $D \times C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (3 \times 1) + (1 \times 6) & (3 \times 4) + (1 \times 3) \\ (2 \times 1) + (0 \times 6) & (2 \times 4) + (0 \times 3) \\ (7 \times 1) + (5 \times 6) & (7 \times 4) + (5 \times 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 8 \\ 37 & 43 \end{pmatrix}$$

b. Pengertian Dikalikan dari Kiri dan Dikalikan dari Kanan

Pada uraian sebelumnya, kita pelajari bahwa dua matriks A dan B dapat dikalikan jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Selanjutnya, jika terdapat perkalian dua matriks $A \times B$, dapat dikatakan

a. matriks B dikalikan dari kiri pada matriks A;
b. matriks A dikalikan dari kanan pada matriks B.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Tentukan hasil perkalian matriks berikut ini.

a. Matriks A dikalikan dari kiri pada matriks B.
b. Matriks A dikalikan dari kanan pada matriks B.

Penyelesaian:

a. Matriks A dikalikan dari kiri pada matriks B, berarti

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

b. Matriks A dikalikan dari kanan pada matriks B, berarti

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dari contoh tersebut, tampak bahwa $AB \neq BA$. Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa perkalian matriks (pada umumnya) tidak bersifat komutatif.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka

$A^2 - 6A + 3I = ...$

a. $-8A$
b. $-10A$
c. $2A$
d. $4A$
e. $10A$

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2006

c. Perkalian dengan Matriks Satuan dan Sifatnya

Pada pembahasan sebelumnya, dijelaskan bahwa matriks satuan adalah suatu matriks diagonal dengan setiap elemen diagonal utamanya 1. Jika suatu matriks dikalikan dari kiri atau dari kanan dengan matriks satuan, hasilnya adalah matriks itu sendiri. Oleh karena itu, perkalian suatu matriks A dengan matriks satuan memiliki sifat

$$IA = AI = A$$

Dengan demikian, matriks satuan disebut juga *matriks identitas*.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Tentukan AI dan IA. Bagaimana hasil perkalian itu?

Penyelesaian:

$$AI = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dengan memerhatikan hasil perkalian di atas, tampak bahwa $AI = IA = A$. Coba kalian selidiki, bagaimana jika A bukan matriks persegi? Apakah $AI = IA = A$? Mengapa?

d. Perpangkatan Matriks Persegi

Seperti halnya pada bilangan real, perpangkatan matriks persegi A didefinisikan sebagai berikut.

Dari pengertian di atas, jika A suatu matriks persegi berordo m,
$A^2 = A \times A$,
$A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A$, dan seterusnya.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Tentukan

a. A^2;

b. $2A^2 - 3A$.

Penyelesaian:

a. $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

b. $2A^2 - 3A = 2\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 16 \\ -16 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$

Sekarang, coba kalian selidiki, apakah $A^2 \times A = A \times A^2 = A^3$?
Selidiki pula, apakah $A^3 \times A = A \times A^3 = A^2 \times A^2 = A^4$?

Diskusi Berpikir Kritis

Misalkan diberikan matriks A berordo $m \times n$, dengan $m \neq n$ dan m, n bilangan asli.
Untuk A^k, k bilangan asli, dapatkah ditentukan nilainya? Mengapa?

6. Sifat-Sifat Perkalian Matriks

Untuk memahami sifat-sifat perkalian matriks, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a. Tentukan $A \times B$, $B \times C$, dan $A \times C$.
   b. Apakah $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$?
   c. Apakah $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$?

Penyelesaian:

a. $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

$B \times C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

b. $A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$

$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$

Ternyata $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. Berarti, perkalian matriks bersifat asosiatif.

c. $A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

$A \times B + A \times C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

Ternyata $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ berarti perkalian matriks bersifat distributif kanan. Dengan menggunakan contoh di atas, dapat ditunjukkan bahwa perkalian matriks juga bersifat distributif kiri, yaitu $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$.

2. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ dan $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tentukan OA dan AO.

$OA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AO = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dengan demikian, $OA = AO = O$.

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Tentukan hasil perkalian matriks berikut ini.

a. $(3A)B$

b. $3(AB)$

c. $A(3B)$

Penyelesaian:

a. $(3A)B = \left[3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$

b. $3(AB) = 3\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]$

$= 3\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$

c. $A(3B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$

Dari hasil perkalian tersebut, tampak bahwa $(3A)B = 3(AB) = A(3B)$. Apakah $3(AB) = (AB)3$? Apakah hal ini termasuk sifat asosiatif? Kemukakan alasanmu.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dan pembahasan sebelumnya, untuk setiap matriks A, B, dan C yang dapat dikalikan atau dijumlahkan, dengan k adalah suatu skalar anggota himpunan bilangan real, pada perkalian matriks berlaku sifat-sifat berikut:

a. Tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$

b. Asosiatif, yaitu $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

c. Distributif kanan, yaitu $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

d. Distributif kiri, $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$

e. Perkalian dengan skalar k, yaitu $(kA) \times B = k(A \times B)$.

f. Jika perkalian hanya memuat matriks-matriks persegi, terdapat unsur identitas, yaitu I sehingga $AI = IA = A$

g. Perkalian dengan matriks O, yaitu $AO = OA = O$.

Tugas Investigasi **Kerjakan di buku tugas**

Misalkan A, B, C, dan D matriks. Apakah berlaku sifat-sifat berikut?

a. Jika $AB = AC$ dan A bukan matriks C.

b. Jika AD matriks nol maka A atau D matriks nol.

Jika ”ya”, buktikan. Jika ’tidak”, carilah contoh matriks A, B, C, dan D sehingga

a. $AB = BC$ dan A bukan matriks tetapi $B \neq C$.

b. AD matriks nol tetapi A dan D bukan matriks nol.

Uji Kompetensi 5

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil perkalian berikut.

   a. $A \times B$

   b. $B \times C$

   c. $A \times C$

   d. $C^t \times A$

   e. $C^t \times B$

   f. $C^t \times A^t$

2. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil perkalian berikut.

   a. $P \times (Q \times R)$

   b. $(Q \times R) \times P$

   c. $(P + Q) \times R$

   d. $Q^t \times R$

   e. $P \times Q^t$

   f. $P \times Q^t \times R^t$

3. Tentukan nilai a dan b yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$

4. Tentukan matriks persegi X ordo 2 yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil operasi berikut.

a. A^2
b. $A \times A^2$
c. $A^2 \times A$
d. A^4

6. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil operasi berikut.

a. $(A + B)^2$
b. $A^2 + 2AB + B^2$
c. $(B - A)^2$
d. $B^2 - 2BA + A^2$

Soal Terbuka Kerjakan di buku tugas

1. Jika $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tunjukkan bahwa $X^2 + 2X + I = 4\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Selidiki apakah $(X - I)^2 = X^2 - 2X + I$.

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil operasi berikut.

   a. A^2
   b. B^2
   c. $A \times B$
   d. $(A - B) \times (A + B)$
   e. $A \times (B + B^t)$
   f. $A^t \times (A^t + B^t)$

D. Balikan atau Invers Matriks

Kamu tentu tahu bahwa balikan (invers) dari 2 adalah 2^{-1} atau $\frac{1}{2}$, invers dari 3 adalah 3^{-1} atau $\frac{1}{3}$, dan seterusnya. Jika kalian cermati, $2 \times 2^{-1} = 1$, $3 \times 3^{-1} = 1$, dan seterusnya. Angka 1 merupakan identitas terhadap perkalian. Operasi invers juga berlaku pada matriks.

Sebelum lebih lanjut mempelajari tentang invers suatu matriks, terlebih dahulu coba kalian pelajari determinan. Untuk lebih mudahnya, determinan yang dipelajari adalah determinan matriks ordo 2 × 2. Mengapa determinan harus dipelajari terlebih dahulu? Karena invers suatu matriks dapat ditentukan jika determinannya diketahui dan determinan itu tidak sama dengan nol.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika matriks

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ maka nilai x yang memenuhi persamaan $|A - xI| = 0$ dengan I matriks satuan dan $|A - xI|$ determinan dari $A - xI$ adalah ....

a. 1 dan –5
b. –1 dan –5
c. –1 dan 5
d. –5 dan 0
e. 1 dan 0

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2001

1. Pengertian Determinan Matriks Ordo 2 x 2

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yang berordo 2×2.

Elemen a dan d pada matriks tersebut terletak pada diagonal utama (pertama), sedangkan b dan c terletak pada diagonal samping (kedua). *Determinan matriks A* (disingkat "det A") yang berordo 2×2 diperoleh dengan mengurangkan hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen pada diagonal kedua. Oleh karena itu, determinan matriks A adalah

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ketahuilah

Determinan suatu matriks ditulis dengan menggunakan garis lurus seperti pada rumus di atas, bukan kurung atau kurung siku seperti halnya pada penulisan matriks.

Contoh:

Tentukan determinan matriks-matriks berikut.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (4 \times 1) = 6 - 4 = 2$

b. $\det B = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (6 \times 4) - (8 \times 3) = 24 - 24 = 0$

2. Pengertian Dua Matriks Saling Invers

Dua matriks dikatakan saling invers jika perkalian kedua matriks itu menghasilkan matriks identitas. Pengertian ini tertuang dalam definisi berikut.

Matriks A disebut *invers* dari matriks B jika
$A \times B = B \times A = I$, dengan I adalah matriks identitas.

Invers dari matriks B ditulis B^{-1}, sedangkan invers matriks A dituliskan dengan A^{-1}.

Perhatikan bahwa pada umumnya perkalian matriks tidak bersifat komutatif, tetapi ada yang bersifat komutatif, yaitu perkalian matriks persegi dengan inversnya dan perkalian matriks persegi dengan matriks identitasnya.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Selidiki apakah A dan B saling invers.

Penyelesaian:

Matriks A dan B saling invers jika berlaku $A \times B = B \times A = I$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Karena $A \times B = B \times A = I$, matriks A dan B saling invers.

Diskusi Berpikir Kritis

Dengan mengingat definisi matriks persegi, invers suatu matriks, dan matriks identitas, serta sifat perkalian matriks, tunjukkan bahwa

a. perkalian matriks persegi dengan inversnya bersifat komutatif;

b. perkalian matriks persegi dengan matriks identitasnya bersifat komutatif.

3. Rumus Invers Matriks Persegi Berordo 2 x 2

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Jika matriks A dikalikan dari kiri dengan matriks $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, diperoleh

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika hasil perkalian ini dikalikan dengan $\frac{1}{ad-bc}$, untuk $ad - bc \neq 0$, diperoleh

$\frac{1}{ad-bc}\left[(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dengan demikian, jika

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Diberikan matriks A, dengan $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; a, b tidak keduanya nol. Jika A^t dan A^{-1} masing-masing menyatakan transpose dan invers dari A, dan $A^t = A^{-1}$ maka a dan b memenuhi ...

a. $a^2 - b^2 = 0$
b. $-a^2 + b^2 = 0$
c. $a^2 - 2b = 1$
d. $a^2 - b^2 = 1$
e. $a^2 + b^2 = 1$

Soal SPMB, Kemampuan IPA, 2004

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ maka matriks B adalah ....

a. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004

Diskusi

Investigasi

Misalkan A dan B matriks persegi berordo 2×2, apakah berlaku sifat:

a. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$?

b. $\det (A + B) = \det A + \det B$?

matriks A dikalikan dari kiri dengan matriks $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, untuk $ad - bc \neq 0$, diperoleh

$$\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Dengan cara yang sama, jika matriks A dikalikan dari kanan dengan matriks $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ untuk $ad-bc \neq 0$, diperoleh

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Berdasarkan pengertian invers suatu matriks, jika hasil kali dua matriks adalah matriks identitas maka matriks yang satu merupakan invers matriks yang lain. Dengan demikian, invers matriks berordo 2×2 dapat dirumuskan sebagai berikut.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan $ad - bc \neq 0$ maka invers matriks A, ditulis A^{-1} adalah

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pengertian di atas, matriks A mempunyai invers jika dan hanya jika $\det A \neq 0$. Matriks semacam ini disebut *matriks nonsingular*. Adapun matriks yang nilai determinannya nol disebut *matriks singular*.

Contoh:

Diketahui $Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tentukan Q^{-1}.

Penyelesaian:

$\det Q = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 \times 2) - (3 \times 1) = 5 \neq 0$. Berarti, Q mempunyai invers.

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Pasangan matriks-matriks manakah yang saling invers?

   a. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

2. Tentukan determinan matriks-matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 3x+1 \end{pmatrix}$

   f. $\begin{pmatrix} -x & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix}$

3. Manakah di antara matriks-matriks di bawah ini yang merupakan matriks nonsingular?

   a. $\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. Tentukan nilai a pada persamaan berikut.

   a. $\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ a & -4 \end{vmatrix} = 9$

   b. $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -12$

   c. $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 23$

   d. $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & a \end{vmatrix} = -13$

   e. $\begin{vmatrix} a & -3 \\ -a & a \end{vmatrix} = -2$

   f. $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 13 & a^2 \end{vmatrix} = -15$

5. Tentukan invers matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} -16 & 19 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

6. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$.

   Tentukan

   a. $A^{-1}B^{-1}$

   b. $B^{-1}A^{-1}$

   c. $(AB)^{-1}$

   d. $(BA)^{-1}$

7. Jika $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, tentukan $(A^{-1})^{-1}$.

8. Jika $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, tentukan

   a. $(A^t)^{-1}$

   b. $(A^{-1})^t$

4. Determinan dan Invers Matriks Ordo 3 × 3 (Pengayaan)

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Determinan matriks A dapat ditentukan dengan menggunakan *aturan Sarrus*.

$$\det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$
$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Selain menggunakan aturan Sarrus, determinan matriks A juga dapat dicari menggunakan rumus berikut.

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

dengan $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ disebut minor elemen a_{11}, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ disebut minor elemen a_{12}, dan $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ disebut minor elemen a_{13}.

Coba kalian buktikan bahwa rumus yang kedua sama dengan rumus yang pertama.

Secara umum, jika elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dihilangkan maka diperoleh submatriks berukuran 2 × 2. Determinan submatriks ini disebut minor elemen a_{ij} ditulis M_{ij}, sedangkan $(-1)^{1+j}\, M_{ij}$ disebut kofaktor elemen a_{ij} ditulis K_{ij}. Dengan menggunakan beberapa pengertian tersebut, rumus determinan matriks A sebagai berikut.

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} K_{ij} \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \text{ atau}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} K_{ij} \text{ dengan } j = 1, 2, 3.$$

Coba kalian tuliskan rumus-rumus determinan matriks A tanpa menggunakan notasi sigma. Bukti rumus ini akan dipelajari di jenjang pendidikan yang lebih tinggi.

5. Rumus Invers Matriks Persegi Ordo 3 × 3 Menggunakan Adjoin

Invers matriks persegi berordo 3 × 3 dapat ditentukan menggunakan beberapa cara. Pada pembahasan kali ini, akan kita pergunakan dua cara, yaitu mengunakan adjoin dan *transformasi baris elementer*. Namun, kali ini kita hanya akan menggunakan cara adjoin. Cara-cara menentukan invers berordo 3 × 3 dapat diperluas untuk matriks yang ordonya 4 × 4, 5 × 5, 6 × 6, dan seterusnya.

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Untuk menentukan invers matriks A dengan menggunakan adjoin, selain beberapa pengertian yang sudah kalian pelajari sebelumnya ada pengertian yang harus kalian pahami, yaitu tentang kofaktor dari matriks A dan adjoin matriks A.

Kofaktor dari matriks A ditulis

$$\text{kof}(A) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix},$$

sedangkan adjoin dari matriks A ditulis adj(A) adalah transpose dari kof (A).

$$[\text{kof}(A)]^t = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}.$$

Terlebih dahulu, kita tentukan nilai minor M_{ij}.

Dari matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, diperoleh

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Leftrightarrow K_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \Leftrightarrow K_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Leftrightarrow K_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Coba, kalian tentukan K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32}, dan K_{33}.
Jika kalian telah menentukan kofaktor-kofaktor itu, diperoleh

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Jadi, invers matriks A yang berordo 3×3, yaitu A^{-1} ditentukan dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}\,(A)$$

Bukti rumus ini akan kalian pelajari di jenjang pendidikan yang lebih tinggi.

Contoh:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Tentukan berikut ini.

a. $\det A$ b. $\text{adj}(A)$ c. A^{-1}

Penyelesaian:

a. *Cara 1:*

(Dengan menggunakan aturan Sarrus)

$\det A = 1 \times 6 \times 4 + 3 \times 2 \times 5 + 2 \times 2 \times 9 - 5 \times 6 \times 2 - 9 \times 2 \times 1 - 4 \times 3 \times 2$
$= 24 + 30 + 36 - 60 - 18 - 24$
$= -12$

Cara 2:

(Dengan cara minor-kofaktor untuk baris pertama)

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$
$= 1(6) - 3(-2) + 2(-12)$
$= -12$

Cobalah dengan cara baris atau kolom yang lain. Apakah hasilnya sama?

b. $$K_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 18 = 6$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 10) = 2$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 30 = -12$$

Coba kalian cari K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32}, dan K_{33}.

Jika sudah menentukan kofaktor-kofaktor itu, kalian akan memperoleh matriks kofaktor A.

$$\text{kof}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -12 \\ 6 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Karena $\text{adj}(A) = [\text{kof}(A)]^t$ maka diperoleh $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 2 & -6 & 2 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

c. $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}(A)$

$= -\frac{1}{12}\,\text{adj}(A)$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 2 & -6 & 2 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

6. Penyelesaian Persamaan Matriks yang Berbentuk $AX = B$ dan $XA = B$

Misalkan A, B, dan X adalah matriks-matriks persegi berordo 2×2, dengan matriks A dan B sudah diketahui elemen-elemennya. Matriks X yang memenuhi persamaan $AX = B$ dan $XA = B$ dapat ditentukan jika A merupakan matriks nonsingular ($\det A \neq 0$).

Cara menyelesaikan persamaan matriks $AX = B$ dan $XA = B$ adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Tentukan invers matriks A, yaitu A^{-1}.

Langkah 2: Kalikan ruas kiri dan ruas kanan persamaan tersebut dengan A^{-1} dari kiri ke kanan.

(Ingat: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ dan $IX = XI = X$).

a. Untuk menyelesaikan persamaan $AX = B$, kalikan kedua ruas persamaan itu dengan A^{-1} dari kiri sehingga diperoleh

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

b. Untuk menyelesaikan persamaan $XA = B$, kalikan kedua ruas persamaan itu dengan A^{-1} dari kanan sehingga diperoleh

$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow XI = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X = BA^{-1}$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa penyelesaian persamaan $AX = B$ dan $XA = B$, dapat ditentukan dengan rumus berikut.

Penyelesaian persamaan matriks $AX = B$ adalah $X = A^{-1}B$.
Penyelesaian persamaan matriks $XA = B$ adalah $X = BA^{-1}$.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut.

a. $AX = B$

b. $XA = B$

Penyelesaian:

Karena $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maka det $A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$.

Oleh karena itu, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Karena $AX = B$ maka $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 39 \\ 3 & -22 \end{pmatrix}$.

b. Karena $XA = B$ maka $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 9 & -25 \end{pmatrix}$.

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan determinan dan adjoin matriks-matriks berikut.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Manakah yang merupakan matriks nonsingular?

a. $P = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 2 \\ -12 & 0 & 0 \\ 16 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $Q = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

c. $R = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -14 \\ 3 & 10 & -6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

d. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Tentukan nilai a yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ a & 5 & 2 \end{vmatrix} = -6$

b. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ a & 10 & 3 \end{vmatrix} = 9$

d. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ a & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 12$

4. Tentukan invers matriks-matriks berikut.

a. $K = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

b. $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d. $N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5. Tentukan matriks X jika diketahui persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & -20 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$

c. $X \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 23 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

d. $X \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 36 \end{pmatrix}$

E. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear

Di awal bab ini, kalian telah dipancing dengan soal prasyarat, bagaimana cara menyajikan koefisien-koefisien sistem persamaan linear ke dalam suatu tabel. Dari tabel itu, tentu kalian akan dapat menyusun sebuah matriks yang berhubungan dengan koefisien-koefisien sistem persamaan linear. Sekarang, mari kita lanjutkan dengan cara menyelesaikan sistem persamaan linear dengan cara matriks.

1. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Sistem persamaan linear dua variabel dapat juga diselesaikan menggunakan matriks. Misalkan terdapat sistem persamaan linear dengan variabel x dan y sebagai berikut.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \text{.......................} \quad (1)$$

Sistem persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{.............................} \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan bentuk persamaan matriks $AX = B$ dengan elemen matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Persamaan ini dapat diselesaikan dengan mengalikan matriks A^{-1} dari kiri, seperti yang telah kita pelajari pada pembahasan sebelumnya.

$$\begin{aligned} & A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & IX = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Karena $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Karena $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, matriks $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dapat ditentukan dengan rumus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Jika sistem persamaan tersebut ditulis dalam bentuk matriks, diperoleh

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Persamaan matriks di atas dapat ditulis menjadi $AX = B$, dengan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

dan $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ dan } A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu,

$$X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(–1, 6)}.

2. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (Pengayaan)

Misalkan terdapat sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases} \quad \text{.......... (1)}$$

Sistem persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{.......... (2)}$$

Persamaan (2) merupakan bentuk persamaan matriks $AX = B$, dengan

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{.......... (3)}$$

Analog dengan pembahasan pada penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel, persamaan matriks tersebut dapat diselesaikan dengan mengalikan A^{-1} dari kiri sebagai berikut.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Dalam hal ini, karena A adalah matriks berordo 3×3 maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}(A).$$

Oleh karena itu,

$$X = \left(\frac{1}{\det A}\text{adj}(A)\right)B = \frac{1}{\det A}\text{adj}(A)B$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dari bentuk persamaan matriks tersebut, diperoleh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 6 + 1) - (4 + 3 - 2) = -6$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ .... (Coba kalian buktikan)}$$

Oleh karena itu,

$$X = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Jadi, penyelesaian dari sistem persamaan linear di atas adalah $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$, dan $z = \frac{3}{2}$.

Soal Terbuka — *Kerjakan di buku tugas*

1. Seorang anak membeli 4 buku tulis dan 3 pensil. Ia harus membayar Rp19.500,00. Jika anak itu membeli 2 buku tulis dan 4 pensil maka anak itu harus membayar Rp16.000,00. Dengan menggunakan invers matriks, tentukan harga sebuah buku tulis dan harga sebuah pensil.
2. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 2 kg apel, 3 kg salak, dan 1 kg jeruk harus membayar Rp33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp36.500,00. Dengan menggunakan metode determinan, tentukan harga masing-masing buah per kg-nya.

3. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Metode Determinan (Pengayaan)

Kalian telah mempelajari determinan matriks berordo 2 × 2 dan 3 × 3. Sekarang kita akan menggunakan determinan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel. Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

1. $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$
2. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = p \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = q \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = r \end{cases}$

Sistem persamaan linear dua variabel di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks $AX = B$, dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Untuk mendapatkan penyelesaiannya, terlebih dahulu tentukan D, D_x, dan D_y, dengan

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ adalah determinan dari matriks koefisien variabel x dan y.

$D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$ adalah determinan D, dengan elemen-elemen pada kolom pertama diganti elemen-elemen matriks B, yaitu p dan q.

$D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$ adalah determinan D, dengan elemen-elemen pada kolom kedua diganti elemen-elemen matriks B, yaitu p dan q.

Setelah D, D_x, dan D_y ditentukan, nilai x dan y dapat diperoleh dengan

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}$$

Dengan cara yang sama, sistem persamaan linear tiga variabel dapat diselesaikan dengan cara berikut.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & p & a_{13} \\ a_{21} & q & a_{23} \\ a_{31} & r & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} p & a_{12} & a_{13} \\ q & a_{22} & a_{23} \\ r & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & p \\ a_{21} & a_{22} & q \\ a_{31} & a_{32} & r \end{vmatrix}$$

Nilai x, y, dan z diperoleh dari

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D}, \text{ dan } z = \frac{D_z}{D}.$$

Agar kalian dapat memahaminya, perhatikan contoh berikut. Dalam hal ini, diberikan contoh sistem persamaan linear tiga variabel. Jika kalian memahami contoh ini, tentunya kalian akan lebih mudah memahami penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan cara determinan.

Contoh:

Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan cara determinan.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Sistem persaman linear di atas dapat diubah ke dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, kita dapat menentukan D, D_x, D_y, dan D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 6 - 8) - (-6 - 2 + 4) = -9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (4 - 6 + 4) - (-6 + 1 + 16) = -9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 24 + 12) - (-6 - 8 - 6) = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-3 - 3 - 16) - (-12 + 6 + 2) = -18$$

Nilai x, y, dan z ditentukan dengan

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-9}{-9} = 1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{-9} = -1;\ z = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-9} = 2$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = 1$, $y = -1$, dan $z = 2$.

Untuk melatih kalian agar menguasai materi ini, kerjakan Uji Kompetensi 8 nomor 1 dan 2 dengan metode determinan.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

1. Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

   a. $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 7x - y = -10 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

2. Tentukan nilai $a + b + c$ jika $\{(a, b, c)\}$ adalah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

   a. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 5x + y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan menggunakan matriks, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut.

   a. $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} x + 6y = -1 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} -2x + 4y = 4 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 5x - 3y = -5 \end{cases}$

   g. $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = -6 \end{cases}$

   h. $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$

   i. $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases}$

   j. $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$

2. Dengan menggunakan matriks, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

   a. $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + 2y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x - 2y - z = -3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 26 \\ -2x + 5y + z = -15 \\ x - 3y - 4z = -5 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} 5x + y + 3z = 9 \\ x - y - z = -1 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} x + 6y - 4z = 15 \\ -3x + 2y - 5z = -8 \\ 6x - 3y + 2z = 25 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} -x + 8y + 2z = 54 \\ 4x - y + 2z = -21 \\ x + 5y - 4z = 3 \end{cases}$

3. Tentukan penyelesaian sistem persamaan berikut.
   (**Petunjuk**: Gunakan pemisalan variabel yang sesuai)

   a. $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ |x| - |y| = 1 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 21 \\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 21 \end{cases}$

4. Misalnya keliling suatu persegi panjang adalah 50 cm dan 5 kali panjangnya dikurangi 3 kali lebarnya sama dengan 45 cm. Buatlah sistem persamaan linearnya. Kemudian, dari sistem persamaan itu, tentukan panjang dan lebar persegi panjang itu dengan menggunakan matriks.

5. Sepuluh tahun lalu umur seorang ayah sama dengan 4 kali umur anaknya. Misalkan jumlah 2 kali umur ayah dan 3 kali umur anaknya sekarang 140 tahun. Buatlah sistem persamaan linear kasus itu, kemudian tentukan umur ayah dan anak sekarang dengan menggunakan matriks.

Soal Terbuka — Kerjakan di buku tugas

Tiga orang A, B, dan C berbelanja gula, beras, dan telur secara bersamaan. A membeli 2 kg gula, 3 kg beras, dan 1 kg telur; B membeli 1 kg gula, 2 kg beras, dan 2 kg telur; sedangkan C membeli 3 kg gula, 1 kg beras, dan 1 kg telur. Uang yang dibayarkan A, B, dan C berturut-turut adalah Rp37.000,00, Rp34.000,00, dan Rp32.000,00. Buatlah sistem persamaan linearnya, kemudian dengan menggunakan matriks, tentukan harga gula, beras, dan telur per kilogramnya.

Refleksi

Coba ingat kembali materi matriks yang baru saja kalian pelajari. Ternyata kalian menemukan cara yang mudah dalam penyusunan angka-angka dengan cara yang ringkas. Menurutmu, apakah materi ini dapat diterapkan dalam praktik nyata? Berikan alasanmu.

Rangkuman

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang berbentuk persegi panjang dan disusun menurut aturan baris dan aturan kolom.
2. Jika suatu matriks mempunyai m baris dan n kolom, matriks tersebut dikatakan mempunyai ordo $m \times n$.
3. Transpose dari matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dengan cara menukarkan setiap elemen baris matriks A menjadi elemen kolom matriks transposenya.
4. Jika A dan B dua matriks yang ordonya sama, pada penjumlahan berlaku $A - B = A + (-B)$.
5. Jika A, B, dan C adalah matriks-matriks yang ordonya sama, pada penjumlahan matriks berlaku
   a. sifat komutatif, yaitu $A + B = B + A$;
   b. sifat asosiatif, yaitu $(A + B) + C = A + (B + C)$;
   c. terdapat unsur identitas, yaitu matriks nol sehingga $A + O = O + A = A$;
   d. setiap matriks A mempunyai invers penjumlahan, yaitu $-A$ sehingga
   $$A + (-A) = -A + A = O.$$
   Pada pengurangan matriks tidak berlaku sifat komutatif, tidak asosiatif, dan tidak terdapat unsur identitas.
6. Jika A, B, dan C adalah tiga matriks yang dapat dijumlahkan atau dikalikan dan k suatu skalar anggota himpunan bilangan real, pada perkalian matriks berlaku sifat-sifat berikut:
   a. tidak komutatif $AB \neq BA$;
   b. asosiatif, yaitu $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
   c. distributif kiri, yaitu $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$;

d. distributif kanan, yaitu $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$;
e. perkalian dengan skalar k, yaitu $(kA) \times B = k(A \times B)$;
f. jika perkalian hanya memuat matriks-matriks persegi, terdapat unsur identitas, yaitu I sehingga $AI = IA = A$;
g. perkalian dengan matriks O, yaitu $AO = OA = O$.

7. Jika k bilangan bulat positif dan A matriks persegi, $A^k = A \times A \times A \times \ldots \times A$ (sebanyak k faktor).
8. Matriks A saling invers dengan matriks B jika $AB = BA = I$, dengan I matriks identitas.
9. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka invers matriks A adalah $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; $ad - bc \neq 0$. Nilai $ab - bc$ disebut determinan matriks A, disingkat dengan det A. Jika det $A = 0$, matriks A tidak mempunyai invers dan disebut matriks singular, sedangkan jika det $A \neq 0$, matriks A disebut matriks nonsingular.

Latihan Ulangan Harian II

Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-x \\ 5y & 4 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$. Jika $A = B$ maka nilai $x^2 + y^2 + 2 \times y = \ldots$.
   a. –4
   b. –2
   c. 2
   d. 4
   e. 16

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
   Jika matriks $C = A + B^t$, matriks $C^t = \ldots$.
   a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

3. Diketahui persamaan matriks $A = 2B^t$, dengan $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{pmatrix}$. Nilai $c = \ldots$.
   a. 2
   b. 3
   c. 5
   d. 8
   e. 10

4. Nilai x yang memenuhi persamaan matriks
   $$\begin{pmatrix} x-y & 2x+1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 9 \\ 4y-3 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 50 \\ 94 & 60 \end{pmatrix}$$
   adalah ....
   a. – 25
   b. – 20
   c. 10
   d. 20
   e. 25

5. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Nilai $x + y$ yang memenuhi persamaan $AB - 2B = C$ adalah ....

a. 0
b. 2
c. 6
d. 8
e. 10

6. Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ maka $A^2 - A = ...$

a. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

7. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ dan $A^2 = mA + nI$, dengan I matriks identitas ordo 2×2, nilai m dan n berturut-turut adalah ....

a. – 5 dan 10
b. – 5 dan –10
c. 5 dan –10
d. 5 dan 10
e. 10 dan 5

8. Jika $\begin{pmatrix} 4 & x-2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$

$= 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

maka nilai $x = ...$

a. 0
d. 14
b. 10
e. 25
c. 13

9. Misalkan diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Matriks I adalah matriks identitas berordo 2×2. Matriks $B = (A + I) \times A \times I$. Matriks $B = ...$

a. $\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 17 & 30 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 30 & 17 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 17 & 31 \end{pmatrix}$

10. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Matriks $B = A^2 + A^3$. Matriks $B = ...$

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, dan

$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Jika $\det A + \det B + n \det C = -6$, nilai n = ...

a. – 2
d. 4
b. – 4
e. – 1
c. 2

12. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

    Nilai n yang memenuhi persamaan det $A - n$ det $B = 30$ adalah ....
    a. -31
    b. -21
    c. 1
    d. 21
    e. 31

13. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ maka $A^{-1}B = ...$
    a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

14. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ adalah invers dari matriks $B = \begin{pmatrix} x+4 & 1 \\ 6 & 2x+y \end{pmatrix}$, nilai $y = ...$
    a. -1
    b. -2
    c. 3
    d. 4
    e. 5

15. Invers dari matriks $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ adalah ....
    a. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 48 \\ 37 & 56 \end{pmatrix}$

    Nilai $x = ...$
    a. -2
    b. -1
    c. 1
    d. 2
    e. 3

17. Matriks A yang memenuhi persamaan $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$ adalah ....
    a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

18. Diketahui persamaan linear yang dinyatakan dalam bentuk matriks berikut.

    $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

    Nilai $y = ...$
    a. 26
    b. $\frac{13}{7}$
    c. $\frac{-13}{7}$
    d. $\frac{-26}{7}$
    e. $\frac{-13}{14}$

19. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ penyelesaian dari persamaan

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ maka $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ = ...

a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

20. Diketahui sistem persamaan dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ mempunyai penyelesaian x_0 dan y_0. Hasil dari $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(x_0 \ \ y_0)$ = ...

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

d. (1)

e. (4)

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan
   a. A^2;
   b. det A.
   c. $A^2 \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   d. $\dfrac{1}{\det A} A^2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan det A = det B jika

   $A = \begin{pmatrix} 5+x & x \\ 5 & 3x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 9 & -x \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

   tentukan
   a. $A^{-1}B$;
   b. BA^{-1};
   c. AB^{-1};
   d. $B^{-1}A$.

4. Diketahui sistem persamaan linear bentuk matriks berikut.

   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.200 \\ 6.800 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Tentukan nilai $x + 2y + 3a + 4b$.

5. Diketahui sistem persamaan linear dalam bentuk matriks berikut.

   $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Tentukan nilai $x + y$.

Latihan Ulangan Umum Semester 1

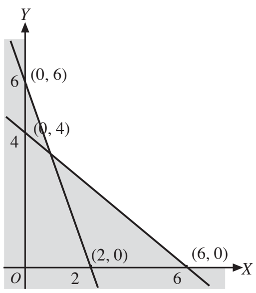
Kerjakan di buku tugas

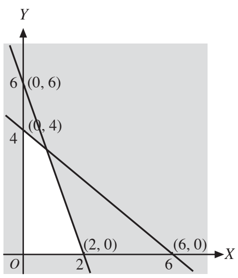
I. Pilihlah jawaban yang tepat.

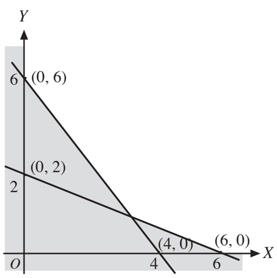
1. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan
   $2x + y \leq 40$
   $x + 2y \leq 40$
   $x \geq 0; y \geq 0$
   terletak pada daerah berbentuk ....
   a. trapesium
   b. persegi panjang
   c. segitiga
   d. segi empat
   e. segi lima

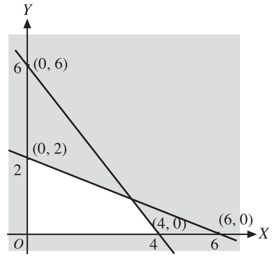
Pada soal berikut, daerah himpunan penyelesaian adalah daerah yang tidak diarsir.

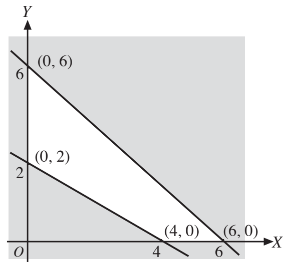
2. Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $3x + y \leq 6$, $2x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah ....

   a.


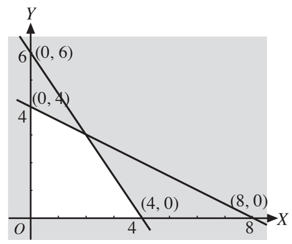
   b.


   c.


   d.


   e.


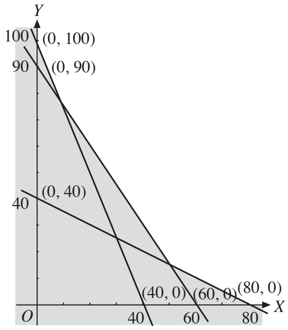
3. Daerah yang tidak diarsir pada gambar berikut menunjukkan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan ....



   a. $2x + y \leq 8$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   b. $x + 2y \leq 8$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   c. $x + 2y \leq 8$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   d. $x + 2y \geq 8$, $3x + 2y \geq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   e. $2x + y \leq 8$, $2x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

4. Nilai maksimum dari $z = 4x + 3y$, dengan syarat $x + y \leq 30$, $4x + y \leq 60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah ....
   a. 60
   b. 70
   c. 80
   d. 90
   e. 100

5. Daerah yang tidak diarsir pada gambar berikut merupakan himpunan penyelesaian dari ....



   a. $x - 2y \geq 80$, $3x - 2y \geq 189$, $5x + 2y \geq 200$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   b. $x + 2y \geq 80$, $3x + 2y \geq 180$, $5x + 2y \geq 200$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   c. $x + 2y \geq 0$, $3x + 2y \leq 180$, $5x + 2y \geq 200$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   d. $x - 2y \geq 80$, $3x + 2y \geq 180$, $5x + 2y \geq 200$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   e. $x - 2y \geq 80$, $3x - 2y \geq 180$, $5x - 2y \geq 200$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

6. Seorang pemborong akan membangun jembatan dalam dua tipe. Dengan modal Rp120.000.000,00 dia sanggup membangun 35 jembatan. Biaya untuk membangun jembatan tipe I Rp4.000,000,00 dan jembatan tipe II Rp3.000.000,00. Keuntungan yang diperoleh dari jembatan tipe I Rp300.000,00 dan tipe II Rp250.000,00 untuk setiap jembatan. Pemborong ingin mendapatkan keuntungan maksimal. Model matematika dari permasalahan tersebut adalah ....
   a. Menentukan nilai maksimum
      $z = 300.000x + 250.000y$
      Kendala: $x + y \leq 35$, $4x + 3y \leq 120$, $x, y \geq 0$
   b. Menentukan nilai maksimum
      $x = 300.000x + 250.000y$
      Kendala: $x + y \leq 35$, $3x + 4y \leq 120$, $x, y \geq 0$
   c. Menentukan nilai maksimum
      $z = 300.000{,}00x + 250.000y$
      Kendala: $x + y \geq 35$, $4x + 3y \geq 120$, $x, y \geq 0$
   d. Menentukan nilai maksimum
      $z = 300.000x + 250.000y$
      Kendala: $x + y \geq 35$, $3x + 4y \geq 120$, $x, y \geq 0$
   e. Menentukan nilai maksimum
      $z = 300.000x + 250.000y$
      Kendala: $x + y \geq 35$, $4x + 3y \leq 120$, $x, y \geq 0$

7. Banyaknya jembatan tipe I dan tipe II yang dibangun oleh pemborong pada soal nomor 7 agar diperoleh keuntungan maksimum berturut-turut adalah ....
   a. 20 dan 15
   b. 15 dan 20
   c. 25 dan 10
   d. 10 dan 25
   e. 30 dan 5

8. Keuntungan maksimum yang diperoleh pada soal nomor 7 adalah ....
   a. Rp5.000.000,00
   b. Rp7.000.000,00
   c. Rp9.500.000,00
   d. Rp10.000.000,00
   e. Rp10.500.000,00

9. Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah tipe *A* dan tipe *B*. Untuk rumah tipe *A* diperlukan 100 m^2 dan tipe *B* diperlukan 75 m^2. Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe *A* adalah Rp6.000.000,00/unit dan tipe *B* adalah Rp4.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut adalah ....
   a. Rp550.000.000,00
   b. Rp600.000.000,00
   c. Rp700.000.000,00
   d. Rp800.000.000,00
   e. Rp900.000.000,00

10. Jika a dan b masing-masing nilai maksimum dan nilai minimum fungsi z = $3x + y$ dengan syarat
$x + y < 50$
$x > y$
$5 < y < 20$
maka nilai $a - b$ adalah ... .
a. 120 d. 30
b. 90 e. 100
c. 60

11. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
Nilai $x + y$ yang memenuhi persamaan $AB - 2B = C$ adalah .... *(UMPTN 1998)*
a. 0 d. 8
b. 2 e. 10
c. 6

12. Jika $\begin{pmatrix} 4^{x+2y} & 0 \\ 2 & 3x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
maka $x + y = ...$
a. $-\frac{15}{4}$ d. $\frac{15}{4}$
b. $-\frac{9}{4}$ e. $\frac{21}{4}$
c. $\frac{9}{4}$

13. $A = \begin{pmatrix} p-1 & p+q \\ p & 2s \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & t \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Jika $A + B = C^2$
maka $q + 2t = ...$
a. –3
b. –2
c. –1
d. 0
e. 1

14. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5+x & x \\ 5 & 3x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 9 & -x \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Jika determinan A dan determinan B sama maka harga x yang memenuhi adalah ....
a. 3 atau 4 d. –4 atau 5
b. –3 atau 4 e. 3 atau –5
c. 3 atau –4

15. Hasil kali matriks $(BA)(B + A^{-1})B^{-1} = ...$
a. $AB + I$ d. $A^{-1} + B$
b. $BA + I$ e. $AB + A$
c. $A + B^{-1}$

16. Jika $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 11 & -62 \end{pmatrix}$
maka nilai $(p - q)^2$ adalah ....
a. 9 d. 196
b. 144 e. 225
c. 169

17. Jika $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ -15 & -11 \end{pmatrix}$ maka nilai $a + b + c + d$ adalah ....
a. 2 d. –5
b. 5 e. –2
c. 0

18. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, A^t dan A^{-1} masing-masing adalah transpose dari matriks A dan invers dari matriks A maka $A^t A^{-1} = ...$
a. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ d. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$
b. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ e. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$
c. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$

19. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} -x & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & y \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 2 & 2x+1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$. Nilai $x - y$ yang memenuhi 2 det A + 3 det B = 16 dan –4 det B + 2 det C = –54 adalah ....
    a. 0
    b. 1
    c. 2
    d. 3
    e. 4

20. Diberikan matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ b & -a \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$. Jika R merupakan invers dari matriks $-2P + Q$ maka a dan b memenuhi ....
    a. $2a^2 - b^2 = -3$
    b. $a + b = 1$
    c. $a - b = 1$
    d. $a^2 + b^2 = 3$
    e. $a^2 - b^2 = -3$

21. Persamaan matriks:
    $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ merupakan persamaan dua garis lurus yang berpotongan di titik yang jumah absis dan ordinatnya sama dengan ....
    a. 0
    b. 2
    c. 3
    d. 4
    e. 5

22. Hasil kali matriks
    $$A \times \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 30 \\ 35 & 27 \end{pmatrix}.$$
    Matriks A adalah .... *(UM-UGM 2004)*
    a. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

23. Transpose dari matriks P adalah P^T. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ memenuhi $A - B^t = C$ maka $x + y$ = ... *(SPMB 2004)*
    a. –2
    b. –1
    c. 0
    d. 1
    e. 2

24. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
    Nilai $(\det A^{-1})^4$ = ...
    a. $\frac{1}{81}$
    b. 1
    c. 4
    d. 81
    e. 121

25. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan I adalah matriks identitas ordo 2 × 2. Matriks $A–kI$ adalah singular. Nilai k = ...
    a. –2 atau 5
    b. –5 atau 2
    c. 2 atau 5
    d. 3 atau 4
    e. 1 atau 2

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Andaikan A adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x + 3x$, dan sumbu X.
   a. Gambarkan sketsa dari A dan B tersebut;
   b. Tentukan luas A.
2. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu jenis A sekurang-kurangnya 100 pasang dan jenis sepatu B sekurang-kurangnya 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan yang diperoleh per pasang sepatu jenis A adalah Rp10.000,00 dan Rp5.000,00 untuk jenis B. Jika banyak sepatu jenis A tidak boleh melebihi 150 pasangan, tentukan keuntungan terbesar yang dapat diperoleh toko tersebut.
3. Sebidang tanah seluas 750 m^2 paling banyak dapat ditanami 1.000 pohon, yaitu pohon jati dan mahoni. Setiap pohon jati memerlukan tempat 1 m^2 dan mahoni $\frac{1}{2}$ m^2. Pada saat panen diharapkan setiap pohon jati menghasilkan kayu senilai Rp1.500.000,00 dan setiap pohon mahoni menghasilkan kayu seharga Rp900.000,00. Berapa pohon masing-masing harus ditanam agar pada saat panen memperoleh hasil sebanyak-banyaknya?
4. Jika titik A merupakan titik perpotongan dua garis yang memenuhi persamaan matriks $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ dan garis l_1 adalah garis yang melalui titik A dan titik asal O, tentukan persamaan garis l_2 yang melalui $B(2, 2)$ dan tegak lurus pada l_1.
5. Diketahui:

$$B = \begin{pmatrix} x+y & x \\ -1 & x-y \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{2} \\ -2y & 3 \end{pmatrix}$$

dan matriks A merupakan transpose matriks B. Jika $A = C$, tentukan nilai $x - 2xy + y$.

Bab III

Barisan dan Deret

Sumber: *Ensiklopedia Pelajar*, 1999

Motivasi

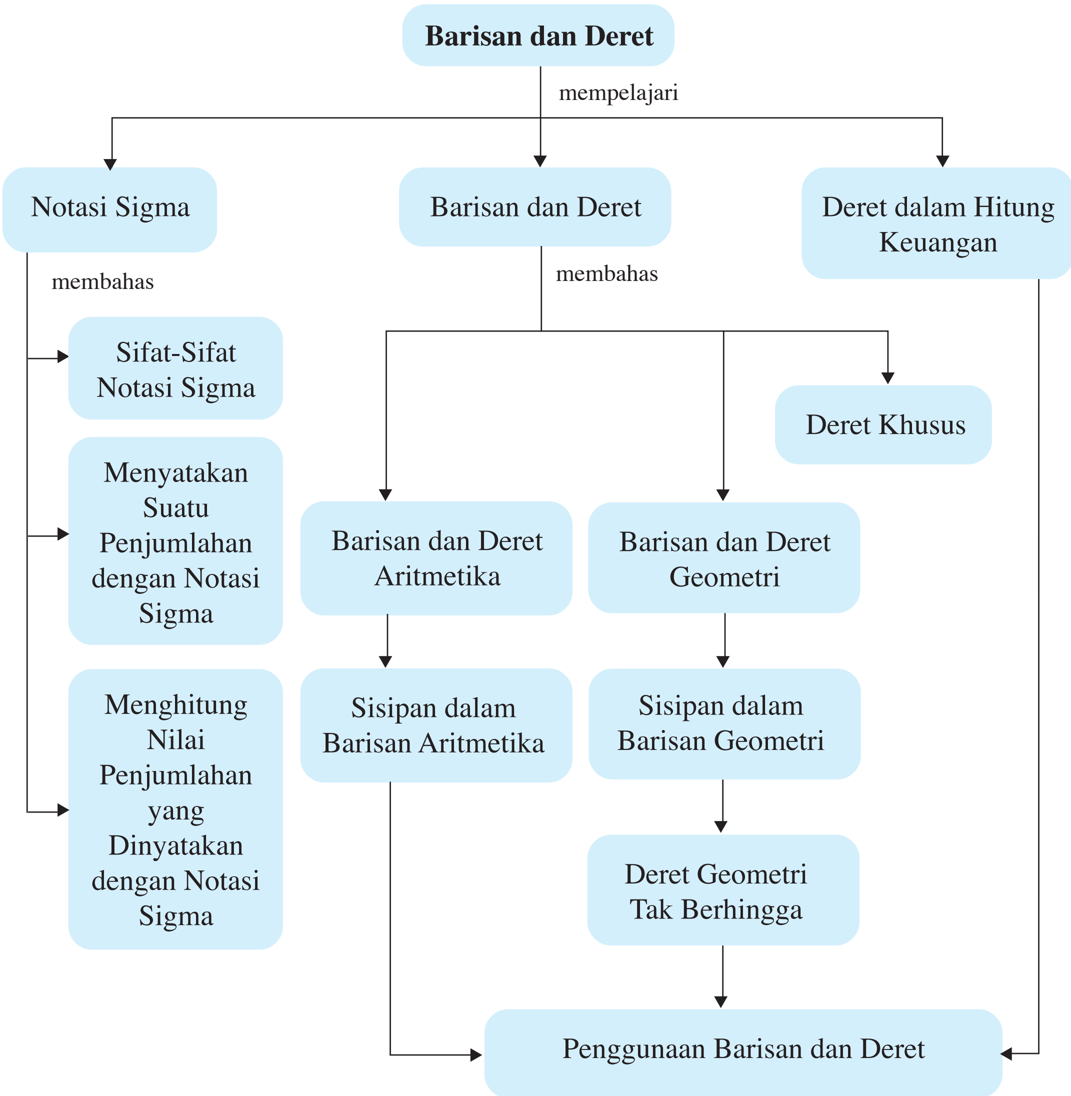
Pernahkah kalian merenungkan keteraturan yang terjadi di alam ini? Munculnya matahari setiap pagi, datangnya musim penghujan dan kemarau pada masa tertentu, pertumbuhan populasi manusia, populasi rusa, serta populasi tumbuhan adalah beberapa contoh keteraturan yang terjadi di alam ini. Para ahli menganalisis peristiwa-peristiwa tersebut dengan suatu barisan atau deret tertentu. Dapatkah kalian memberikan contoh keteraturan lain di alam ini?

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menjelaskan ciri barisan aritmetika dan baris geometri;
2. merumuskan suku ke-n dan jumlah n suku deret aritmetika dan deret geometri;
3. menentukan suku ke-n dan jumlah n suku deret aritmetika dan deret geometri;
4. menjelaskan ciri deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah;
5. menghitung jumlah deret geometri tak hingga;
6. menuliskan suatu deret aritmetika dan geometri dengan notasi sigma;
7. menjelaskan karakteristik masalah yang model matematikanya berbentuk deret aritmetika atau geometri;
8. merumuskan deret yang merupakan model matematika dari masalah;
9. menentukan penyelesaian dari model matematika;
10. memberikan tafsiran terhadap solusi (hasil yang diperoleh) dari masalah;
11. menjelaskan rumus-rumus dalam hitung keuangan dengan deret aritmetika atau geometri;
12. menentukan bunga tunggal, bunga majemuk, dan anuitas.

Peta Konsep



Kata Kunci

- barisan bilangan
- barisan berhingga
- barisan tak berhingga
- barisan aritmetika
- barisan geometri
- beda
- deret
- sigma
- suku

Pada pokok bahasan ini, kita akan mempelajari notasi sigma sebagai penyederhanaan bentuk penjumlahan yang memuat banyak suku yang memiliki pola (keteraturan) tertentu. Kemudian, kita lanjutkan dengan membahas pengertian barisan dan deret bilangan yang meliputi barisan dan deret aritmetika, barisan dan deret geometri, serta deret-deret khusus seperti deret bilangan asli dan deret kuadrat bilangan asli.

Sebelum lebih jauh mempelajari bab ini, ada baiknya kalian jawab soal-soal berikut.

Uji Prasyarat — **Kerjakan di buku tugas**

1. Apakah yang disebut barisan dan deret?
2. Tunjukkan, mana yang merupakan barisan? (Berilah alasan.)
   a. 1, 2, 3, 4, 5, ...
   b. 1, 1, 1, 1, 1, ...
   c. 4, 3, 5, 2, 6, 7, 9, ...
3. Di SMP kalian telah mempelajari bunga, baik bunga tunggal maupun bunga majemuk. Apakah bunga itu? Apa pula bunga tunggal dan bunga majemuk itu? Berikan gambarannya.

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari lanjutkan ke materi berikut.

A. Notasi Sigma

Matematika sering disebut sebagai bahasa lambang atau bahasa simbol. Hal ini disebabkan di dalam matematika banyak digunakan lambang-lambang atau simbol-simbol untuk menyatakan suatu pernyataan yang lebih singkat dan lebih jelas. Di antara penggunaan lambang ini adalah pada bentuk penjumlahan suku-suku yang memiliki pola (keteraturan) tertentu. Lambang yang digunakan untuk menuliskan bentuk penjumlahan suku-suku seperti ini adalah notasi "Σ" (dibaca: sigma). Simbol ini diambil dari abjad Yunani "*S*" yang merupakan huruf pertama kata "Sum" yang berarti jumlah.

Dalam penggunaannya, notasi Σ selalu diikuti dengan indeks atau variabel yang menentukan batas bawah dan batas atas penjumlahan tersebut. Indeks penjumlahan ini dapat dipilih sembarang huruf kecil. Daerah penjumlahan dapat berhingga (terbatas) dan dapat pula tak terhingga (tak terbatas).

1. Menyatakan Suatu Penjumlahan dengan Notasi Sigma

Misalkan terdapat penjumlahan bilangan asli dari 1 sampai dengan 100, yaitu $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$. Jika suku-sukunya ditulis, bentuk penjumlahan tersebut menjadi sangat panjang. Dengan menggunakan notasi sigma, penulisan ini dapat dipersingkat, yaitu sebagai berikut.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \sum_{n=1}^{100} n$ (Dibaca: sigma n, untuk $n = 1$ sampai dengan 100).

Pada penulisan tersebut, variabel yang digunakan adalah n, sedangkan batas bawahnya $n = 1$ dan batas atasnya $n = 100$.

Contoh:

Nyatakan penjumlahan berikut ini dengan notasi sigma.

a. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24$

b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{11}{12}$

c. $xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 + \ldots + x^{11}y^{12}$

Penyelesaian:

a. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 = \sum_{k=1}^{8} 3k$

b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{11}{12} = \sum_{k=1}^{11} \frac{k}{k+1}$

c. $xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 + \ldots + x^{11}y^{12} = \sum_{k=1}^{11} x^k y^{k+1}$

2. Nilai Penjumlahan dalam Notasi Sigma

Untuk menghitung nilai penjumlahan yang dinyatakan dengan notasi sigma, bentuk penjumlahan tersebut dinyatakan sebagai bentuk biasa terlebih dahulu, kemudian ditentukan hasilnya. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai penjumlahan yang dinyatakan dalam notasi sigma berikut.

a. $\sum_{z=5}^{15} z^2$

b. $\sum_{p=1}^{5} (2p + 3)$

Penyelesaian:

a. $\sum_{z=5}^{15} z^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2$

$= 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + 169 + 196 + 225 = 1.210$

b. $\sum_{p=1}^{5} (2p + 3) = (2(1) + 3) + (2(2) + 3) + (2(3) + 3) + (2(4) + 3) + (2(5) + 3)$

$= 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

$= 45$

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Nyatakan bentuk penjumlahan berikut dengan menggunakan notasi sigma.
   a. $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$
   b. $4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 1.000$
   c. $1 \times 3 + 4 \times 6 + 9 \times 11 + \dots + 100 \times 102$
   d. $2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + ... + 101 \times 103$
   e. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + ... + \frac{60}{3.601}$
   f. $\frac{4}{7} + \frac{5}{8} + \frac{6}{9} + \frac{7}{10} + ... + \frac{83}{86}$
   g. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ... + x_{100}^3$
   h. $xy^{n-1} + x^2y^{n-2} + ... + x^n$
2. Nyatakan notasi sigma berikut dalam bentuk penjumlahan biasa. Jika tidak memungkinkan untuk menulis seluruhnya, gunakan titik-titik seperti pada soal nomor 1.
   a. $\sum_{k=1}^{8} (8k + 5)$
   b. $\sum_{k=1}^{100} (k + 8)$
   c. $\sum_{k=3}^{12} 6^k$
   d. $\sum_{i=1}^{6} 3^i$
   e. $\sum_{k=1}^{8} (k^2 + 2k + 6)$
   f. $\sum_{i=1}^{5} (2i + 6)^2$
   g. $\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{k^2 + 3k + 6}$
   h. $\sum_{p=1}^{10} \frac{p^2}{p + 1}$
   i. $\sum_{p=1}^{10} (p^2 - 1)$
   j. $\sum_{n=1}^{10} (2n^2 - n + 1)$

3. Hitunglah nilai penjumlahan yang dinyatakan dengan notasi sigma berikut.

a. $\sum_{k=1}^{6}(2k+5)$

b. $\sum_{k=1}^{10}(k-6)^2$

c. $\sum_{p=1}^{5}(2p^2+5p+1)$

d. $\sum_{p=2}^{8}(p-1)^3$

e. $\sum_{p=1}^{4}(p^3-2p^2+3p+1)$

f. $\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{k^2+2}$

g. $\sum_{p=1}^{3}\frac{p^2}{p^2+3p-2}$

h. $\sum_{p=1}^{10}p(p+1)^2$

i. $\sum_{p=3}^{12}p^2(p-2)$

j. $\sum_{n=1}^{10}(3n-7)n$

3. Sifat-Sifat Notasi Sigma

Coba pahami kembali notasi sigma di atas. Jika kalian telah menguasainya, tentu kalian akan dapat menemukan sifat-sifat yang berlaku pada notasi sigma. Sifat-sifat yang berlaku pada notasi sigma adalah sebagai berikut.

Jika $a, b \in$ himpunan bilangan bulat positif, sedangkan U_k dan V_k adalah rumus suku ke-k dari suatu notasi sigma maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. $\sum_{k=a}^{b}(U_k+V_k)=\sum_{k=a}^{b}U_k+\sum_{k=a}^{b}V_k$

2. $\sum_{k=a}^{b}cU_k=c\sum_{k=a}^{b}U_k$, untuk $c \in R$

3. a. $\sum_{k=a}^{b}U_k=\sum_{k=a+p}^{b+p}U_{k-p}$ b. $\sum_{k=a}^{b}U_k=\sum_{k=a-p}^{b-p}U_{k+p}$

4. $\sum_{k=a}^{b}c=(b-a+1)c$

5. $\sum_{k=a}^{p-1}U_k+\sum_{k=p}^{b}U_k=\sum_{k=a}^{b}U_k$

6. $\sum_{k=a}^{a-1}U_k=0$

7. $\sum_{k=a}^{b}(U_k+V_k)^2=\sum_{k=a}^{b}U_k^2+2\sum_{k=a}^{b}U_kV_k+\sum_{k=a}^{b}V_k^2$

Bukti:

1. $$\sum_{k=a}^{b}(U_k + V_k) = (U_a + V_a) + (U_{a+1} + V_{a+1}) + \ldots + (U_b + V_b)$$
$$= (U_a + U_{a+1} + \ldots + U_b) + (V_a + V_{a+1} + \ldots + V_b)$$
$$= \sum_{k=a}^{b} U_k + \sum_{k=a}^{b} V_k \quad \text{.........................} \text{(terbukti)}$$

2. $$\sum_{k=a}^{b} cU_k = cU_a + cU_{a+1} + cU_{a+2} + \ldots + cU_b$$
$$= c(U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \ldots + U_b)$$
$$= c\sum_{k=a}^{b} U_k \quad \text{...} \text{(terbukti)}$$

3. a. $$\sum_{k=a}^{b} U_k = U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \ldots + U_b$$
$$= U_{(a+p)-p} + U_{(a+p)-p+1} + U_{(a+p)-p+2} + \ldots + U_{(b+p)-p}$$
$$= \sum_{k=a+p}^{b+p} U_{k-p} \quad \text{.................................} \text{(terbukti)}$$

   b. Dengan cara serupa, tentu kalian dapat menunjukkan bahwa $\sum_{k=a}^{b} U_k = \sum_{k=a-p}^{b-p} U_{k+p}$.

4. $$\sum_{k=a}^{b} c = (b - a + 1)c$$

   Bukti:

$$\sum_{k=a}^{b} c = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{(b-a+1)suku} = (b - a + 1)\, c \quad \text{............} \text{(terbukti)}$$

6. $$\sum_{k=a}^{a-1} U_k = 0$$

   Bukti:

   Dari sifat $\sum_{k=a}^{p-1} U_k + \sum_{k=p}^{b} U_k = \sum_{k=a}^{b} U_k$, diperoleh

$$\sum_{k=a}^{p-1} U_k = \sum_{k=p}^{b} U_k - \sum_{k=a}^{b} U_k.$$

Jika $p = a$, diperoleh $\sum_{k=a}^{a-1} U_k = \sum_{k=a}^{b} U_k - \sum_{k=a}^{b} U_k = 0$ .... (terbukti)

Sifat (5) dan (7) mudah untuk dibuktikan. Coba kalian kerjakan sebagai latihan.

Contoh:

1. Tentukan nilai dari $\sum_{k=1}^{3}(k^2+3k)$.

Penyelesaian:

Cara 1:

$$\sum_{k=1}^{3}(k^2+3k) = ((1^2)+3(1))+(2^2+3(2))+(3^2+3(3))$$
$$= 4+10+18 = 32$$

Cara 2:

$$\sum_{k=1}^{3}(k^2+3k) = \sum_{k=1}^{3}k^2 + \sum_{k=1}^{3}3k$$
$$= (1^2+2^2+3^2)+(3(1)+3(2)+3(3))$$
$$= ((1+4+9)+(3+6+9))$$
$$= 32$$

2. Buktikan bahwa $\sum_{p=2}^{n}5(5p+6) = \sum_{p=1}^{n-1}(5p+11)$.

Penyelesaian:

$$\sum_{p=2}^{n}(5p+6) = \sum_{p=1}^{n-1}(5(p+1)+6)$$
$$= \sum_{p=1}^{n-1}(5p+5+6)$$
$$= \sum_{p=1}^{n-1}(5p+11) \quad \text{........................ (terbukti)}$$

3. Dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma, buktikan bahwa

$$\sum_{p=1}^{n}(4p-1)^2 = 16\sum_{p=1}^{n}p^2 - 8\sum_{p=1}^{n}p + n .$$

Penyelesaian:

$$\sum_{p=1}^{n}(4p-1)^2 = \sum_{p=1}^{n}(16p^2-8p+1)$$
$$= \sum_{p=1}^{n}16p^2 - \sum_{p=1}^{n}8p + \sum_{p=1}^{n}1$$
$$= 16\sum_{p=1}^{n}p^2 - 8\sum_{p=1}^{n}p + n \quad \text{........................ (terbukti)}$$

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma, buktikan pernyataan-pernyataan berikut.

   a. $\sum_{k=1}^{n}(4k+1)^2 = 16\sum_{k=1}^{n}k^2 + 8\sum_{k=1}^{n}k + n$

   b. $\sum_{k=1}^{n}(k-12)^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 24\sum_{k=1}^{n}k + 144n$

   c. $\sum_{k=6}^{n}(3k+2) = 3\sum_{k=3}^{n-3}k + 11(n-5)$

   d. $\sum_{k=4}^{n}(k^2+5) = \sum_{k=3}^{n-3}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n-3}k + 14(n-3)$

   e. $\sum_{k=3}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n-2}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n-2}k + 9(n-2)$

   f. $\sum_{k=1}^{n}(2k+4) = 2\sum_{k=3}^{n+2}k$

2. Tulislah notasi sigma berikut dengan batas bawah 0.

   a. $\sum_{k=3}^{n}6k$

   b. $\sum_{k=2}^{n}(2k+3)$

   c. $\sum_{i=4}^{n}i(i+5)$

   d. $\sum_{k=3}^{n}(3k-1)^2$

   e. $\sum_{i=1}^{n}(i^2+3i-6)$

   f. $\sum_{i=5}^{n}\frac{(i+2)^2}{(i^2-2i+1)}$

3. Tulislah notasi sigma berikut dengan batas bawah 2.

   a. $\sum_{k=0}^{n}7k$

   b. $\sum_{k=1}^{n}(5k-6)$

   c. $\sum_{i=1}^{n}(i+6)(i-2)$

   d. $\sum_{k=0}^{n}(2k+7)^2$

   e. $\sum_{i=1}^{n}(i^2-4i+8)$

   f. $\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+2)^2}{i^2+3i+5}$

B. Barisan dan Deret

Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat menjumpai bilangan-bilangan yang diurutkan dengan aturan tertentu. Perhatikan urutan bilangan-bilangan berikut.

1) 0, 2, 4, 6, 8, …
2) 1, 3, 5, 7, 9, …
3) 0, 1, 4, 9, 16, …
4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Bentuk-bentuk di atas dinamakan barisan bilangan. Jadi, *barisan bilangan* adalah susunan bilangan yang diurutkan menurut aturan tertentu. Bentuk umum barisan bilangan adalah $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Setiap bilangan yang terurut pada barisan bilangan di atas disebut *suku barisan*. Suku ke-n dari suatu barisan ditulis dengan simbol U_n (n bilangan asli). Dengan demikian, a_1 disebut suku pertama atau U_1, a_2 disebut suku kedua atau U_2, dan a_n disebut suku ke-n atau U_n. Di antara suku-suku barisan bilangan dan himpunan bilangan asli terdapat korespondensi satu-satu seperti terlihat dalam diagram berikut.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & .... & a_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & .... & n \end{array}$$

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa suku-suku suatu barisan bilangan merupakan suatu nilai fungsi f dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real dengan aturan $U_n = f(n)$. Dalam hal ini, $U_n = f(n)$ disebut rumus suku ke-n dari barisan bilangan tersebut.

Contoh:

1. Tentukan lima suku pertama dari barisan bilangan $U_n = n^2 - 1$.

   Penyelesaian:

   Karena rumus $U_n = n^2 - 1$, dapat ditentukan bahwa $U_1 = 1^2 - 1 = 0$, $U_2 = 2^2 - 1 = 3$, $U_3 = 3^2 - 1 = 8$, $U_4 = 4^2 - 1 = 15$, dan $U_5 = 5^2 - 1 = 24$.

   Jadi, lima suku pertamanya adalah 0, 3, 8, 15, 24.

2. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = n^2 + n$.
   a. Tentukan lima suku pertama dari barisan tersebut.
   b. Suku keberapa dari barisan tersebut yang bernilai 156?

   Penyelesaian:

   a. Karena $U_n = n^2 + n$, dapat ditentukan bahwa $U_1 = 1^2 + 1 = 2$, $U_2 = 2^2 + 2 = 6$, $U_3 = 3^2 + 3 = 12$, $U_4 = 4^2 + 4 = 20$, dan $U_5 = 5^2 + 5 = 30$.
      Jadi, 5 suku pertamanya adalah 2, 6, 12, 20, 30.

   b. Diketahui suku ke-n = 156. Berarti,

   $$\begin{aligned} & U_n = 156 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 + n = 156 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 + n - 156 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (n - 12)(n + 13) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n = 12 \text{ atau } n = -13 \text{ (dipilih nilai } n \text{ positif)} \end{aligned}$$

      Jadi, suku yang nilainya 156 adalah suku ke-12.

Misalkan suku ke-n dari suatu barisan tidak diketahui. Kita dapat menentukan rumus umum untuk mencari suku ke-n barisan bilangan tersebut dengan memerhatikan pola suku-suku barisan itu.

Contoh:

Tentukan rumus suku ke-n dari barisan-barisan berikut, kemudian tentukan nilai suku yang diminta di dalam tanda kurung.

a. 5, 10, 15, 20, 25, ... (U_{100})

b. 2, 5, 10, 17, 26, ... (U_{24})

Penyelesaian:

a. 5, 10, 15, 20, 25, ...

$U_1 = 5 = 5 \times 1$
$U_2 = 10 = 5 \times 2$
$U_3 = 15 = 5 \times 3$
$U_4 = 20 = 5 \times 4$
$U_5 = 25 = 5 \times 5$
...
$U_n = 5n$

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah $U_n = 5n$ dan $U_{100} = 5 \times 100 = 500$.

b. 2, 5, 10, 17, 26, ...

$U_1 = 2 = 1 + 1 = 1^2 + 1$
$U_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1$
$U_3 = 10 = 9 + 1 = 3^2 + 1$
$U_4 = 17 = 16 + 1 = 4^2 + 1$
$U_5 = 26 = 25 + 1 = 5^2 + 1$
...
$U_n = n^2 + 1$

Jadi, rumus suku ke-n barisan tersebut adalah $U_n = n^2 + 1$ dan $U_{24} = 24^2 + 1 = 577$.

Selain dengan memerhatikan pola suku-sukunya, suku-suku barisan bilangan dapat ditentukan dengan menggunakan rumus. Bagaimana caranya?

Selain deret-deret di atas, coba perhatikan urutan bilangan berikut.

1. $a \quad a \quad a \quad a \quad a$ .....

   $U_n = a$, untuk a konstanta, $n = 1, 2, 3, ...$

2. $a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5$ .....

   $b \quad b \quad b \quad b$

   $U_n = an + b$, untuk a dan b konstanta, $n = 1, 2, 3, ...$

3. $a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5$ .....

   $b_1 - b_2 - b_3 - b_4$ ......

   $c \quad c \quad c$

   $U_n = an^2 + bn + c$, untuk a, b, c konstanta, $n = 1, 2, 3, ...$

Catatan: pada kasus ini tanda ”–” kita baca ”berselisih”.

Pada kasus 1, suku-suku barisan selalu sama sehingga disebut barisan konstan. Pada kasus 2, selisih dua barisan yang berurutan selalu sama. Barisan rumus suku-sukunya ini memiliki bentuk persamaan linear. Barisan seperti ini nantinya akan kita sebut barisan aritmetika. Kasus 3 dapat kalian pahami dari bagan sehingga diperoleh selisih konstan.

Menentukan konstanta a, b, dan c pada kasus 3, yaitu $U_n = an^2 + bn + c$.

- Ambil 3 suku, misalnya U_1, U_2, dan U_3 sehingga diperoleh sistem persamaan linear tiga variabel, yaitu

  $U_1 = a(1^2) + b(1) + c \Leftrightarrow a + b + c = U_1$
  $U_2 = a(2^2) + b(2) + c \Leftrightarrow 4a + 2b + c = U_2$
  $U_3 = a(3^2) + b(3) + c \Leftrightarrow 9a + 3b + c = U_3$
- Selesaikan sistem persamaan tersebut sehingga diperoleh suku ke-n, yaitu $U_n = an^2 + bn + c$.

Contoh:

Tentukan suku ke-n barisan 2, 5, 9, 14, 20, ...

Penyelesaian:

2   5   9   14   20   ....
  –   –   –   –
 3   4   5   6   ....
   –   –   –
   1   1   1   ....

Dari urutan barisan di atas, terlihat bahwa suku ke-n barisan tersebut sesuai dengan kasus 3, yaitu $U_n = an^2 + bn + c$.

Untuk menentukan a, b, dan c, ambil 3 suku, misalnya $U_1 = 2$, $U_2 = 5$, dan $U_3 = 9$. Dengan demikian, diperoleh

$U_1 = a(1^2) + b(1) + c \Leftrightarrow a + b + c = 2$
$U_2 = a(2^2) + b(2) + c \Leftrightarrow 4a + b + c = 5$
$U_3 = a(3^2) + b(3) + c \Leftrightarrow 9a + b + c = 9$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel tersebut, diperoleh nilai

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, dan $c = 0$.

Jadi, barisan tersebut adalah $U_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 0$ atau $U_n = \frac{1}{2}n(n + 3)$.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Coba, kalian tentukan rumus suku ke-n dari barisan-barisan berikut.

1. 5, 8, 11, 14, 17, ...
2. 7, 12, 20, 31, 45, ...
3. 9, 16, 28, 48,79, ...
4. 4, 5, 9, 18, 34, 59, ...

Berdasarkan banyaknya suku, barisan dapat dibedakan menjadi dua macam.

a. *Barisan berhingga*, yaitu barisan yang banyak suku-sukunya berhingga (tertentu).

Misalnya, barisan bilangan asli yang kurang dari 12, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dan barisan bilangan ganjil yang kurang dari 100, yaitu 1, 3, 5, 7, 9, …, 99.

b. *Barisan tak berhingga*, yaitu barisan yang banyak suku-sukunya tak berhingga.

Misalnya, barisan bilangan asli, yaitu 1, 2, 3, 4, … dan barisan bilangan bulat, yaitu …, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

Jika suku-suku suatu barisan dijumlahkan maka terbentuklah suatu deret.

Misalkan $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ adalah suatu barisan bilangan. Deret bilangan didefinisikan dengan $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

Diskusi Berpikir Kritis

Diskusikan dengan teman-teman kalian, bagaimana rumus umum untuk menentukan suku-suku barisan berikut.

a. 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...
b. 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, ...
c. –1, 2, – 3, 4, – 5, ...
d. –1, 1, –2, 2, –3, 3, ...

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan lima suku pertama dari barisan bilangan berikut.
   a. $U_n = 3n - 5$
   b. $U_n = n^2$
   c. $U_n = n^2 + 4$
   d. $U_n = 3n^2$
   e. $U_n = n^2 - 3n$
   f. $U_n = \frac{1}{2}n + 6$
   g. $U_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}$
   h. $U_n = \frac{1}{4}n^2 + 2n - 1$
2. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 5n + 4$.
   a. Tentukan enam suku pertama dari barisan tersebut.
   b. Suku keberapa dari barisan tersebut yang bernilai 504?
3. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 2n^2 - 8$.
   a. Tentukan empat suku pertama dari barisan tersebut.
   b. Suku keberapa dari barisan tersebut yang bernilai 12.792?

4. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan-barisan berikut, kemudian tentukan nilai suku yang diminta di dalam kurung.
   a. 3, 6, 9, 12, ... (U_{16})
   b. 1, 4, 7, 10, ... (U_{20})
   c. 0, 3, 8, 15, ... (U_{12})
   d. 3, 10, 21, 36, ... (U_8)
   e. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots (U_{10})$
   f. $\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \ldots (U_{15})$
5. Tentukan suku ke-25 dan suku ke-30 dari barisan-barisan berikut.
   a. 3, 10, 17, 24, …
   b. 6, 11, 16, 21, …
   c. 12, 15, 18, 21, …
   d. –3, –6, –9, –12, …
   e. –4, 0, 4, 8, …
   f. $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ...
6. Tentukan rumus suku ke-n barisan-barisan berikut.
   a. 1, 4, 9, 16, 25
   b. 4, 7, 12, 19, 28
   c. 6, 9, 14, 24, 31
   d. 1, 2, 6, 13, 23
   e. 2, 3, 7, 14, 24
7. Diketahui suku ke-n dari suatu barisan bilangan adalah $U_n = an + b$. Jika $U_2 = 11$ dan $U_3 = 12$, tentukan U_{100}.
8. Jika suku ke-n suatu barisan bilangan adalah $U_n = an^2 + \mathrm{b}$, $U_3 = 28$, dan $U_5 = 76$, tentukan nilai dari $U_{10} + U_{13}$.

Soal Terbuka — **Kerjakan di buku tugas**

Diketahui barisan bilangan dengan suku ke-n dirumuskan $U_n = an + b$. Jika $U_2 + U_4 = 28$ dan $U_{12} - U_{10} = 6$, tentukan

a. U_n;
b. U_{100};
c. $U_n + U_{n+1}$.

1. Barisan dan Deret Aritmetika

Barisan dan deret ini sebenarnya telah kalian pelajari di SMP. Namun, kali ini kalian diajak untuk mempelajari lebih lanjut materi ini. Untuk itu, perhatikan **Tabel 3.1**.

a. Barisan Aritmetika

Jika kalian amati, pada **Tabel 3.1**, barisan mendatar memiliki selisih tetap, yaitu 1 dan barisan menurun juga memiliki selisih tetap, yaitu 8. Barisan-barisan seperti ini dinamakan barisan aritmetika.

Tabel 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32

Barisan aritmetika atau *barisan hitung* adalah suatu barisan bilangan, dengan setiap suku-suku yang berurutan memiliki selisih tetap (konstan). Selisih yang tetap ini disebut *beda* dan dilambangkan dengan b. Pada tabel di atas terdapat beberapa barisan aritmetika, di antaranya sebagai berikut.

$$\underbrace{1 \quad 2}_{+1}\underbrace{\quad 3}_{+1}\underbrace{\quad 4}_{+1}\underbrace{\quad 5}_{+1} \ldots \qquad (b = 1)$$

$$\underbrace{2 \quad 10}_{+8}\underbrace{\quad 18}_{+8}\underbrace{\quad 26}_{+8} \qquad (b = 8)$$

$$\underbrace{2 \quad 11}_{+9}\underbrace{\quad 20}_{+9}\underbrace{\quad 29}_{+9} \qquad (b = 9)$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk suatu barisan aritmetika. Jika kelilingnya 72 cm maka luas segitiga itu adalah ....

a. 108 cm^2
b. 135 cm^2
c. 162 cm^2
d. 216 cm^2
e. 270 cm^2

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2003

Secara umum, dapat dikatakan sebagai berikut.

Apabila U_n adalah rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika, berlaku bahwa selisih suku ke-n dan suku ke-$(n - 1)$ selalu tetap, ditulis

$$U_n - U_{n-1} = b$$

b disebut beda.

Jika suku pertama dari barisan aritmetika (U_1) dinotasikan dengan a dan beda dinotasikan dengan b yang nilainya selalu tetap maka suku-suku barisan aritmetika tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$U_1 = a$
$U_2 = a + b$
$U_3 = (a + b) + b = a + 2b$
$U_4 = (a + 2b) + b = a + 3b$
...
$U_n = a + (n - 1)b$

Oleh karena itu, diperoleh barisan aritmetika berikut.

$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots, a + (n - 1)b, \ldots$

Bentuk barisan ini dinamakan *barisan aritmetika baku* dengan rumus umum suku ke-n sebagai berikut.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n $\qquad$ b = beda
a = suku pertama $\qquad$ n = banyak suku

Contoh:

1. Tentukan suku ke-7 dan suku ke-10 dari barisan-barisan berikut.
   a. 3, 7, 11, 15, ...
   b. $x + p, x + 6p, x + 11p, x + 16p, ...$

   Penyelesaian:

   a. 3, 7, 11, 15, ...
   Suku pertama barisan tersebut adalah $a = 3$ dan bedanya $b = 7 – 3 = 4$. Oleh karena itu, rumus umum suku ke-n barisan itu adalah $U_n = 3 + (n – 1)4$.
   Suku ke-7: $U_7 = 3 + (7 – 1)4 = 27$
   Suku ke-10: $U_{10} = 3 + (10 – 1)4 = 39$

   b. $x + p, x + 6p, x + 11p, x + 16p, ...$
   Suku pertama barisan tersebut $a = x + p$ dan bedanya $b = (x + 6p) – (x + p) = 5p$.
   Suku ke-7: $U_7 = (x + p) + (7 – 1)5p$
   $= x + 31p$
   Suku ke-10: $U_{10} = (x + p) + (10 – 1)5p$
   $= x + 46p$

2. Dari suatu barisan aritmetika, diketahui suku ke-3 dan suku ke-5 adalah 16 dan 20. Tentukan suku pertama, beda, dan suku ke-20 barisan tersebut.

   Penyelesaian:

   Rumus barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n – 1)b$.
   Karena $U_3 = 16$ maka $a + 2b = 16$ .... (1)
   Karena $U_5 = 20$ maka $a + 4b = 26$ .... (2)
   Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh $a = 12$ dan $b = 2$.
   Berarti, $U_n = 12 + (n – 1)2$ dan $U_{20} = 12 + (20 – 1)2 = 50$.

Problem Solving

Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 24 dan hasil kalinya adalah 384. Tentukan ketiga bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Tiga bilangan yang membentuk barisan aritmetika dapat dimisalkan $a, a + b, a + 2b$, tetapi jika diambil pemisalan tersebut, penyelesaiannya agak panjang. Agar penyelesaiannya lebih mudah, ketiga bilangan itu dimisalkan $p – q, p$, dan $p + q$. (ingat: pemisahan kedua ini juga memiliki beda yang tetap, yaitu q).

Karena jumlahnya 24 maka

$(p – q) + p + (p + q) = 24$

$\Leftrightarrow 3p = 24$

$\Leftrightarrow p = 8$

Karena hasil kalinya 384 maka

$(p – q) \times p \times (p + q) = 384$

$\Leftrightarrow p(p^2 – q^2) = 384$

Untuk $p = 8$, diperoleh

$$8(64 - q^2) = 384$$
$$\Leftrightarrow 64 - q^2 = 48$$
$$\Leftrightarrow q^2 = 16 = \pm\ 4$$

Untuk $p = 8$ dan $q = 4$, ketiga bilangan tersebut adalah 4, 8, dan 12.
Untuk $p = 8$ dan $q = -4$, ketiga bilangan tersebut adalah 12, 8, dan 4.
Jadi, ketiga bilangan itu adalah 4, 8, dan 12.
Coba kalian selesaikan contoh 3 dengan menggunakan pemisalan a, $a + b$, dan $a + 2b$ (di sini a bilangan terkecil dan b beda). Apakah hasilnya sama?

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

1. Tunjukkan bahwa tiga bilangan terurut a, b, dan c membentuk barisan aritmetika apabila memenuhi persamaan $2b = a + c$.
2. Tunjukkan bahwa empat bilangan terurut a, b, c, dan d membentuk barisan aritmetika apabila memenuhi persamaan $b + c = a + d$.

b. Sisipan dalam Barisan Aritmetika (Pengayaan)

Pada suatu barisan aritmetika, dapat disisipkan beberapa suku di antara dua suku yang berurutan sehingga diperoleh barisan aritmetika yang baru. Perhatikan barisan aritmetika berikut.

$$a,\ a + b,\ a + 2b,\ a + 3b,\ ...,\ a + (n - 1)b$$

Apabila di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan k suku, diperoleh barisan aritmetika baru yang suku pertamanya sama dengan suku pertama barisan semula, yaitu a, beda b', dan banyaknya suku adalah n'. Besarnya nilai b' dan n' dapat ditentukan dengan cara berikut.

Tabel 3.2

Barisan Aritmetika Semula	U_1	U_2	$U_3 ...$
Barisan Aritmetika Baru	$U_1'\ \underbrace{U_2'\ U_3'\ ...\ U_{k+1}'}_{k \text{ suku}}$	$U_{k+2}'\ \underbrace{U_{k+3}'\ U_{k+4}'\ ...\ U_{2k+2}'}_{k \text{ suku}}$	$U_{2k+3}'\ ...$

Dari tabel di atas, diperoleh rumusan sebagai berikut.

a. Suku pertama barisan semula sama dengan suku pertama barisan yang baru, yaitu $U_1 = U_1' = a$.

b. Rumus suku ke-n barisan semula adalah $U_n = a + (n - 1)b$, rumus suku ke-n' barisan yang baru adalah

$$U'_{n'} = a + (n' - 1)b'.$$

c. Suku ke-2 barisan yang baru bersesuaian dengan suku ke-(k + 2) barisan yang lama, yaitu

$U_2 = a + b$ .... (1)

dan $U_{k+2} = a + ((k + 2) - 1)b'$ .... (2)

Karena persamaan (1) dan (2) bersesuaian, diperoleh

$a + b = a + (k + 2 - 1)b'$

$\Leftrightarrow\ a + b = a + (k + 1)b'$

$\Leftrightarrow\ b = (k + 1)b'$

$\Leftrightarrow\ b' = \dfrac{b}{k+1}$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa apabila di antara setiap dua suku yang berurutan pada suatu barisan aritmetika disisipkan k suku, diperoleh barisan aritmetika baru yang suku pertamanya sama dengan suku pertama barisan aritmetika sebelumnya dan rumus umumnya adalah

$$U'_{n'} = a + (n' - 1)b'$$

dengan $n' = n + (n - 1)k$ dan $b' = \dfrac{b}{k+1}$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jumlah dari 33 suku pertama dari deret aritmetika adalah 891. Jika suku pertama deret adalah 7 maka suku ke-33 adalah ....

a. 41
b. 45
c. 47
d. 49
e. 51

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004

Contoh:

Diketahui barisan aritmetika 3, 9, 15, 21, ... Di antara setiap dua suku yang berurutan pada barisan tersebut disisipkan dua suku sehingga diperoleh barisan aritmetika baru. Tentukan beda, suku ke-12, dan suku ke-37 barisan yang baru.

Penyelesaian:

Diketahui barisan: 3, 9, 15, 21, ... Berarti suku pertama $a = 3$ dan beda $b = 9 - 3 = 6$. Banyak suku yang disisipkan adalah $k = 2$ sehingga beda barisan yang baru adalah

$b' = \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{6}{2+1} = 2$. Oleh karena itu, rumus umum barisan aritmetika yang baru adalah

$$\begin{aligned} U'_{n'} &= a' + (n' - 1)b' \\ &= 3 + (n' - 1)2 \end{aligned}$$

Suku ke-12 dari barisan yang baru adalah $U'_{12} = 3 + (12 - 1)2 = 25$ dan suku ke-37 adalah $U'_{37} = 3 + (37 - 1)2 = 75$.

Jadi, beda barisan yang baru 2, suku ke-12 dan ke-37 barisan yang baru berturut-turut adalah 25 dan 75.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui beda dan suku pertama dari suatu barisan aritmetika masing-masing adalah 6 dan –4. Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan dua suku sehingga diperoleh barisan aritmetika baru. Tentukan suku ke-12 dan suku ke-15 dari barisan yang baru.
2. Di antara dua suku yang berurutan pada barisan 3, 18, 33, ... disisipkan 4 buah bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika baru. Tentukan jumlah 7 suku pertama dari barisan aritmetika baru tersebut.

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui suku ke-6 dan suku ke-9 dari suatu barisan aritmetika masing-masing adalah 30 dan 45. Tentukan suku pertama, beda, dan suku ke-25 barisan tersebut.
2. Pada suku keberapakah dari barisan aritmetika 84, $80\frac{1}{2}$, 77, ... yang nilainya sama dengan 0?
3. Dalam suatu barisan aritmetika diketahui suku ke-3 adalah 9, sedangkan jumlah suku ke-5 dan ke-7 adalah 36. Tentukan suku ke-100 barisan tersebut.
4. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu 30 dan hasil kalinya 750. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
5. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu 18 dan hasil kalinya 192. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
6. Diketahui suatu barisan mempunyai urutan $k + 1$, $3k + 3$, $4k + 4$, ... Agar barisan tersebut merupakan barisan aritmetika, tentukan nilai k.
7. Misalkan U_n adalah suku ke-n suatu barisan aritmetika. Jika diketahui bahwa $U_1 + U_2 + U_3 = -9$ dan $U_3 + U_4 + U_5 = 15$, tentukan nilai $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$.
8. Sebuah trapesium sisi-sisinya membentuk barisan aritmetika. Jika diketahui bahwa alas trapesium merupakan sisi terpanjang. Apabila sisi terpendeknya 10 cm, tingginya 2 cm, dan luasnya 50 cm^2, tentukan keliling trapesium itu.
9. Jika suku pertama suatu barisan aritmetika adalah 5, suku terakhirnya adalah 23, serta selisih antara suku ke-8 dan ke-3 adalah 10, tentukan banyak suku dari barisan aritmetika tersebut.
10. Diketahui barisan aritmetika 7, 11, 15, 19, ... Di antara setiap dua suku yang berurutan pada barisan tersebut disisipkan satu suku sehingga diperoleh barisan aritmetika baru. Tentukan beda, suku ke-24, dan suku ke-40 dari barisan yang baru.

c. Deret Aritmetika

Kalian telah mengetahui definisi barisan aritmetika. Jumlah seluruh suku-sukunya ditulis dalam bentuk penjumlahan dari suku pertama, suku kedua, dan seterusnya, bentuk ini dinamakan deret aritmetika. Jadi, *deret aritmetika* atau *deret hitung* adalah suatu deret yang diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku barisan aritmetika. Jika a, $a + b$, $a + 2b$, ... , $a + (n - 1)b$ adalah barisan aritmetika baku maka $a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + (n - 1)b)$ disebut *deret aritmetika baku*. Jumlah n suku deret aritmetika dinotasikan dengan S_n sehingga

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + (n - 1)b)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a + (k - 1)b)$$

Rumus jumlah n suku dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{lllll} S_n = a & + (a + b) & + (a + 2b) + ... & + (a + (n-1)b) & \\ S_n = (a + (n-1)b) & + (a + (n-2)b) & + (a + (n-3)b) + ... & & + a \end{array}$$

$$2S_n = \underbrace{(2a + (n-1)b) + (2a + (n-1)b) + (2a + (n-1)b) + ... + (2a + (n-1)b)}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}} \quad +$$

$$\Leftrightarrow 2S_n = n(2a + (n - 1)b)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b)$$

Karena rumus suku ke-n suatu deret aritmetika adalah

$U_n = a + (n - 1)b$ maka $S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$.

Jadi, rumus jumlah n suku suatu deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b) \text{ atau } S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

Keterangan:

S_n = jumlah n suku $\quad$ b = beda

a = suku pertama $\quad$ n = banyaknya suku

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dari suatu deret aritmetika suku ke-5 adalah $5\sqrt{2} - 3$ dan suku ke-11 adalah $11\sqrt{2} + 9$. Jumlah 10 suku pertama adalah ....

a. $50\sqrt{2} + 45$
b. $50\sqrt{2} + 35$
c. $55\sqrt{2} + 40$
d. $55\sqrt{2} + 35$
e. $55\sqrt{2} + 45$

Soal SUMPTN, Kemampuan Dasar, 2001

Diskusi Berpikir Kritis

Diskusikan dengan teman-teman kalian apakah benar bahwa:

$U_n = bn + (a + b)$

$S_n = \frac{1}{2}bn^2 + (a - \frac{1}{2}b)n$

Jika benar, apa yang dapat kalian katakan mengenai U_n dan S_n dipandang sebagai fungsi n?

Contoh:

1. Tentukan jumlah 20 suku pertama dari deret 2 + 5 + 8 + 11 + ...

   Penyelesaian:

   Diketahui deret 2 + 5 + 8 + 11 + ... Dari deret tersebut, diperoleh $a = 2$, $b = 3$, dan $n = 20$.

   Cara 1:

   Jumlah 20 suku pertama deret tersebut adalah

   $$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$$

   $$S_{20} = \frac{1}{2}(20)(2(2) + (20 - 1)3) = 10(61) = 610$$

   Cara 2:

   $$U_n = a + (n - 1)b$$
   $$U_{20} = 2 + (20 - 1)3 = 59$$
   $$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$
   $$S_{20} = \frac{1}{2}(20)(2 + U_{20}) = 10(2 + 59) = 10(61) = 610$$

2. Tentukan jumlah bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 4.

   Penyelesaian:

   Bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 4 adalah 4, 8, 12, 16, ..., 96. Berarti, $a = 4$, $b = 8 - 4 = 4$, dan $U_n = 96$. Kita tentukan nilai n sebagai berikut.

   $$U_n = a + (n - 1)b$$
   $$\Leftrightarrow 96 = 4 + (n - 1)4$$
   $$\Leftrightarrow 96 = 4n$$
   $\Leftrightarrow n = 24$ (Barisan ini mempunyai 24 suku).

   Jumlah bilangan-bilangan tersebut adalah

   $$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n) \Leftrightarrow S_{24} = \frac{1}{2} \times 24(4 + 96) = 12\ (100) = 1.200.$$

3. Di antara setiap 2 suku berurutan pada deret 5 + 8 + 11 + 14 + ... disisipkan 5 suku sehingga terbentuk deret aritmetika yang baru. Tentukan suku ke-15 dan jumlah 20 suku pertama pada deret yang baru.

   Penyelesaian:

   Deret aritmetika semula 5 + 8 + 11 + 14 + ... berarti, $a = 5$ dan $b = 3$. Disisipkan 5 suku, berarti $k = 5$. Dengan demikian, pada deret aritmetika yang baru, diperoleh $a = 5$ dan $b' = \frac{b}{k+1} = \frac{3}{5+1} = \frac{1}{2}$. Suku ke-15 deret yang baru adalah

   $U'_{15} = 5 + (15 - 1)\frac{1}{2} = 5 + 7 = 12$, sedangkan jumlah 20 suku yang pertama adalah

   $$S'_{20} = \frac{1}{2}(20)(2(5) + (20 - 1)\frac{1}{2}) = 10(10 + 9,5) = 195$$

Problem Solving

Suku ke-2 suatu deret aritmetika adalah 5, sedangkan jumlah suku ke-4 dan ke-6 adalah 28. Tentukan suku ke-9 dan jumlah dari 12 suku pertama deret tersebut.

Penyelesaian:

$U_2 = a + b = 5$ .... (1)

$U_4 + U_6 = 28 \Leftrightarrow (a + 3b) + (a + 5b) = 28$

$\Leftrightarrow 2a + 8b = 28$

$\Leftrightarrow a + 4b = 14$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$\begin{array}{rl} a + b & = 5 \\ a + 4b & = 14 \\ \hline -3b & = -9 \Leftrightarrow b = 3 \end{array} \; -$$

Nilai $b = 3$ disubstitusikan ke persamaan (1) sehingga diperoleh $a = 2$.

Suku ke-9 adalah $U_9 = a + 8b = 2 + 8(3) = 26$.

$$S_{12} = \frac{1}{2}(12)\ (2(2) + (12 - 1)3) = 6\ (4 + 33) = 222.$$

Jadi, jumlah 12 suku yang pertama deret tersebut adalah 222.

Uji Kompetensi 5

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan jumlah deret aritmetika berikut.
   a. $2 + 5 + 8 + 11 + ...$ sampai dengan 20 suku.
   b. $3 + 9 + 15 + 31 + ...$ sampai dengan 18 suku.
   c. $1 + 6 + 11 + 16 + ...$ sampai dengan 16 suku.
   d. $60 + 56 + 52 + 48 + ...$ sampai dengan 12 suku.
   e. $-20 - 14 - 8 - 2 - ...$ sampai dengan 25 suku.
2. Tentukan banyak suku dan jumlah deret aritmetika berikut.
   a. $4 + 9 + 14 + 19 + ... + 104$
   b. $-12 - 8 - 4 - 0 - ... - 128$
   c. $72 + 66 + 60 + 54 + ... - 12$
   d. $-3 - 7 - 11 - 15 ... - 107$
3. Tentukan banyak suku dari deret berikut.
   a. $6 + 9 + 12 + 15 + ... = 756$
   b. $56 + 51 + 46 + 41 + ... = -36$
   c. $10 + 14 + 18 + 22 + ... = 640$
4. Tentukan nilai k pada deret berikut.
   a. $4 + 10 + 16 + 22 + ... + k = 444$
   b. $5 + 8 + 11 + 14 + ... + k = 440$
5. Dalam suatu deret aritmetika diketahui suku pertama adalah 3, suku ke-n = 87, serta jumlah suku ke-6 dan suku ke-7 adalah 39. Tentukan jumlah n suku pertama dari deret tersebut.
6. Dalam suatu deret aritmetika, diketahui suku ke-4 dan suku ke-8 masing-masing adalah 17 dan 58. Tentukan jumlah 25 suku pertama dari deret tersebut.

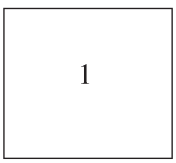
7. Tentukan jumlah 25 suku pertama dari deret berikut.
   a. $3 + 5 + 7 + ...$
   b. $-8 + (-4) + 0 + 4 + ...$
   c. $15 + 12 + 9 + ...$
   d. $18 + 15\frac{1}{2} + 13 + ...$
   e. $0 + x + 2x + 3x + ...$
8. Tentukan jumlah bilangan-bilangan antara 300 dan 700 yang habis dibagi 4.
9. Tentukan jumlah bilangan-bilangan antara 1.000 dan 2.000 yang habis dibagi 13.
10. Tentukan jumlah bilangan-bilangan antara 500 dan 1.000 yang habis dibagi 9.
11. Dalam suatu deret aritmetika yang terdiri atas 10 suku, diketahui suku pertama 0 dan beda 6. Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan tiga bilangan sehingga terbentuk deret aritmetika baru.
12. Tentukan jumlah deret $\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + ...$

Soal Terbuka — Kerjakan di buku tugas

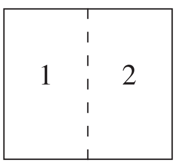
1. Pada suatu bimbingan belajar, murid baru yang mendaftar setiap bulannya bertambah dengan jumlah yang sama. Jumlah murid baru yang mendaftar pada bulan ke-2 dan ke-4 adalah 20 orang, sedangkan jumlah pendaftar pada bulan ke-5 dan ke-6 adalah 40 orang. Tentukan jumlah murid yang mendaftar sampai dengan bulan ke-10.
2. Tentukan nilai dari $\frac{1 + 3 + 5 + 7 + ... + 91}{2 + 4 + 6 + 8 + ... + 92}$.

2. Barisan dan Deret Geometri

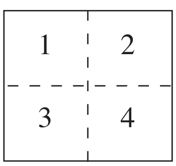
Seperti halnya barisan dan deret aritmetika, materi tentang barisan dan deret geometri ini juga pernah kalian pelajari di SMP. Mari kita perdalam lagi materi ini.



1 Segi empat



2 Segi empat



4 Segi empat

a. Barisan Geometri

Misalnya kalian memiliki selembar kertas berbentuk persegi. Dari kertas itu, kalian lipat sehingga lipatan satu dengan lipatan yang lainnya tepat saling menutupi. Jika lipatan dibuka maka akan terdapat 2 segi empat dengan sebagian sisinya berupa bekas lipatan. Setelah lipatan pertama, jika kalian melanjutkan melipatnya, kalian akan mendapatkan 4 segi empat dengan sisi-sisi sebagian segi empat berupa bekas lipatan. Jika kegiatan melipat diteruskan, diperoleh gambaran seperti di samping.

Barisan 1, 2, 3, 4, 8, ... dinamakan barisan geometri.

Sekarang perhatikan juga barisan 1, 3, 9, 27, 81, ... Pada barisan ini, suku kedua adalah tiga kalinya suku pertama, suku ketiga tiga kalinya suku kedua, demikian seterusnya. Barisan yang demikian juga dinamakan barisan geometri. Jadi, *barisan geometri* atau *barisan ukur* adalah suatu barisan bilangan yang setiap sukunya diperoleh dengan cara mengalikan suku di depannya dengan bilangan yang tetap (konstan). Bilangan yang tetap ini disebut *pembanding (rasio)* yang dinotasikan dengan r. Secara umum, dapat dikatakan sebagai berikut.

1	2
3	4
5	6
7	8

8 Segi empat

demikian seterusnya.

Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ disebut barisan geometri apabila berlaku

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$$

Misalnya:

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \; ... \quad (r = 3)$$
$$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$$

$$1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \; ... \quad (r = \tfrac{1}{2})$$
$$\times \tfrac{1}{2} \quad \times \tfrac{1}{2} \quad \times \tfrac{1}{2}$$

$$2 \quad -4 \quad 8 \quad -16 \; ... \quad (r = -2)$$
$$\times(-2) \quad \times(-2) \quad \times(-2)$$

Dari contoh-contoh di atas, tampak bahwa apabila suku-suku dari suatu barisan geometri positif semua atau negatif semua, rasio barisan itu positif. Namun, apabila suku-suku dari suatu barisan geometri bergantian tanda, rasio barisan itu negatif.

Apabila suku pertama (U_1) dari barisan geometri dinyatakan dengan a dan rasio r maka

$U_1 = a$
$U_2 = ar$
$U_3 = ar \times r = ar^2$
$U_4 = ar^2 \times r = ar^3$
...
$U_n = ar^{n-1}$

Dengan demikian, diperoleh barisan geometri $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}, ...$

Barisan ini disebut *barisan geometri baku*. Rumus umum suku ke-n barisan itu adalah

$$U_n = ar^{n-1}$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n $\qquad r$ = rasio
a = suku pertama $\qquad n$ = banyak suku

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dalam suatu barisan geometri, $U_1 + U_3 = p$, dan $U_2 + U_4 = q$ maka $U_4 = ...$

a. $\dfrac{p^3}{p^2 + q^2}$

b. $\dfrac{q^3}{p^2 + q^2}$

c. $\dfrac{p^3 + q^3}{p^2 + q^2}$

d. $\dfrac{q^2}{q^2 + p^2}$

e. $\dfrac{p^2 + q^3}{p^2 + q^2}$

Soal UMPTN, 1996

Contoh:

Dari barisan-barisan geometri berikut, tentukan suku pertama, rasio, suku ke-5, dan suku ke-9.

a. 1, 2, 4, ...

b. 9, 3, 1, ...

Penyelesaian:

a. 1, 2, 4, ...

Dari barisan tersebut, diperoleh $a = 1$ dan $r = \frac{2}{1} = 2$. Oleh karena itu, suku ke-5 dan suku ke-9 masing-masing adalah

$U_5 = ar^{5-1} = 1(2^4) = 16$;

$U_9 = ar^{9-1} = 1(2^8) = 256$.

b. 9, 3, 1, ...

Dari barisan tersebut, nilai $a = 9$ dan $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Oleh karena itu, suku ke-5 dan suku ke-9 masing-masing adalah

$U_5 = ar^{5-1} = 9(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{9}$;

$U_9 = ar^{9-1} = 9(\frac{1}{3})^8 = 9(\frac{1}{6.561}) = \frac{1}{729}$.

Problem Solving

Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu 26 dan hasil kalinya 216. Tentukan ketiga bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan ketiga bilangan tersebut adalah $\frac{a}{p}$, a, dan ap.

Jumlah ketiga bilangan itu 26 sehingga

$\frac{a}{p} + a + ap = 26$ .... (1)

Hasil kalinya 216 sehingga $\frac{a}{p} \times a \times ap = 216$ .... (2)

Dari persamaan (2), diperoleh $a^3 = 216$ atau $a = 6$. Jika nilai $a = 6$ disubstitusikan ke persamaan (1), diperoleh

$$\frac{6}{p} + 6 + 6p = 26$$

$\Leftrightarrow$ $6 + 6p + 6p^2 = 26p$
$\Leftrightarrow$ $6p^2 - 20p + 6 = 0$
$\Leftrightarrow$ $(3p - 1)(2p - 6) = 0$
$\Leftrightarrow$ $p = \frac{1}{3}$ atau $p = 3$

Untuk $a = 6$ dan $p = \frac{1}{3}$, ketiga bilangan tersebut adalah 18, 6, dan 2. Untuk $a = 6$ dan $p = 3$, ketiga bilangan tersebut adalah 2, 6, dan 18. Jadi, ketiga bilangan itu adalah 2, 6, dan 18. Dapatkah kalian menyelesaikan soal ini jika ketiga bilangan dimisalkan dengan a, ap, dan ap^2? Mana yang lebih mudah? Jelaskan.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

1. Tunjukkan bahwa tiga bilangan terurut a, b, dan c membentuk barisan geometri apabila memenuhi persamaan $b^2 = ac$.
2. Tunjukkan bahwa empat bilangan terurut a, b, c, dan d membentuk barisan geometri apabila memenuhi persamaan $ad = bc$.

b. Sisipan dalam Barisan Geometri (Pengayaan)

Seperti pada barisan aritmetika, pada barisan geometri juga dapat disisipkan beberapa suku di antara setiap dua suku yang berurutan sehingga diperoleh barisan geometri yang baru. Perhatikan barisan geometri baku berikut.

$$a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}$$

Jika di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan k bilangan, diperoleh barisan geometri baru dengan suku pertama sama dengan suku pertama barisan geometri semula yaitu $U_1 = a$, rasio $= r'$, dan banyaknya suku yang baru adalah n'. Untuk mengetahui hubungan antara r' dan n' dengan r dan n, perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.3

Barisan Geometri Semula	U_1	U_2	U_3
Barisan Geometri Baru	$U'_1 \underbrace{U'_2\ U'_3 \ldots U'_{k+1}}_{k \text{ suku}}\ U'_{k+2}$	$\underbrace{U'_{k+3}\ U'_{k+4}\ U'_{k+5} \ldots U'_{2k+2}}_{k \text{ suku}}$	U'_{2k+3}

Dari tabel tersebut, tampak adanya kesesuaian antara suku ke-2 barisan semula, yaitu $U_2 = ar$ dengan suku ke-$(k + 2)$ pada barisan yang baru, yaitu $U'_{k+2} = a(r')^{k+1}$ sehingga diperoleh

$$ar = a(r')^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow r = (r')^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow r' = \sqrt[k+1]{r}$$

Dengan demikian, rumus suku ke-n pada barisan yang baru adalah

$$U_{n'} = a(r')^{n'-1}$$

dengan $n' = n + (n - 1)k$ dan $r' = \sqrt[k+1]{r}$

Contoh:

Diketahui barisan geometri 1, 9, 81, ... Di antara masing-masing suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk barisan geometri yang baru. Tentukan rasio dan suku ke-8 dari barisan yang baru.

Penyelesaian:

Barisan geometri semula adalah 1, 9, 81, ... Berarti $a = 1$ dan $r = 9$. Di antara dua suku yang berurutan disisipkan 1 suku ($k = 1$) sehingga rasio barisan yang baru adalah

$r' = \sqrt[k+1]{r} = \sqrt[1+1]{9} = \sqrt{9} = 3$.

Oleh karena itu, suku ke-8 barisan yang baru adalah $U_8 = a(r')^{8-1} = 1(3^7) = 2.187$.

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Dari barisan-barisan geometri berikut, tentukan suku pertama, rasio, suku ke-12, dan suku ke-15.
   a. 2, 4, 8, 16, ...
   b. 4, 2, 1, ...
   c. 1, –2, 4, –8, ...
   d. 2, 6, 18, ...
   e. –3, 6, –12, ...
   f. 5, 15, 45, ...
2. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 35 dan hasil kalinya 1.000. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
3. Bilangan $k - 2$, $k - 6$, dan $2k + 3$, untuk $k > 0$, membentuk tiga suku pertama dari deret geometri. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
4. Jika $2k - 5$, $k - 4$, dan $\frac{1}{5}(k - 4)$ adalah tiga bilangan yang membentuk barisan geometri, tentukan nilai k.
5. Tiga buah bilangan membentuk suatu barisan geometri, dengan rasio lebih besar dari satu. Jika bilangan terakhir dikurangi 3, ketiga bilangan itu membentuk barisan aritmetika, sedangkan jika ketiga bilangan itu dijumlahkan, hasilnya adalah 54. Tentukan selisih bilangan ke-3 dan bilangan ke-1.
6. Jika suku pertama dan ke-3 dari barisan geometri masing-masing adalah $\sqrt[3]{m}$ dan m, untuk $m > 0$, tentukan suku ke-13 dan ke-15.
7. Sebuah tali dipotong menjadi 6 bagian. Panjang bagian yang satu dengan yang lain membentuk suatu barisan geometri. Jika potongan tali terpendek adalah 3 cm dan terpanjang adalah 96 cm, tentukan panjang tali semula.

8. Diketahui barisan geometri 1, 8, 64, ... Di antara masing-masing suku yang berurutan disisipkan dua suku sehingga terbentuk barisan geometri yang baru. Tentukan rasio dan suku ke-10 dari barisan geometri yang baru.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui p dan q adalah akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + x + a = 0$. Jika p, q, dan $\frac{1}{2}pq$ membentuk barisan geometri, tentukan nilai a.
2. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri, dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, terbentuk sebuah barisan aritmetika. Jika jumlah ketiga bilangan aritmetika itu 30, tentukan hasil kali ketiga bilangan itu.

c. Deret Geometri

Seperti halnya deret-deret lainnya yang diperoleh dengan menjumlahkan suku-sukunya, *deret geometri* atau *deret ukur* adalah suatu deret yang diperoleh dengan menjumlahkan suku-suku barisan geometri. Oleh karena itu, jika $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ adalah barisan geometri baku, deret $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ disebut *deret geometri baku*.

Jumlah n suku pertama dari deret geometri dinyatakan dengan S_n sehingga

$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$. Rumus jumlah n suku pertama dari deret geometri dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{rl} S_n & = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \\ rS_n & = \quad\;\; ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \\ \hline (1 - r)S_n & = a - ar^n \end{array} \; -$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Jadi, rumus jumlah n suku pertama suatu deret geometri adalah sebagai berikut.

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ untuk } r < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ untuk } r > 1$$

Apa yang terjadi jika $r = 1$?

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika r rasio (pembanding) suatu deret geometrik tak hingga yang konvergen dan S jumlah deret geometrik tak hingga

$$\frac{1}{3+r} + \frac{1}{(3+r)^2} + \frac{1}{(3+r)^3} + ...$$

maka ....

a. $\frac{1}{4} < S < \frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{8} < S < \frac{3}{4}$

c. $\frac{1}{3} < S < 1$

d. $\frac{3}{4} < S < \frac{4}{3}$

e. $\frac{1}{5} < S < \frac{4}{5}$

Soal UMPTN, Kemampuan IPA, 1998

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Ambil sembarang deret geometri yang banyaknya suku ganjil. Perhatikan bahwa suku tengah deret tersebut dalah $U_t = \sqrt{U_1 \cdot U_n} = \sqrt{U_2 \cdot U_{n-1}} = \sqrt{U_3 \cdot U_{n-2}} = \sqrt{U_4 \cdot U_{n-3}}$ demikian seterusnya.

Contoh:

1. Tentukan jumlah lima suku pertama dari deret 1 + 2 + 4 + 8 + ...

   Penyelesaian:

   1 + 2 + 4 + 8 + ..., berarti $a = 1$ dan $r = 2 > 1$.

   $$S_5 = \frac{1(2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{1(2^5 - 1)}{1} = 31$$

2. Suatu deret geometri dinyatakan dengan notasi sigma $S_n = \sum_{n=3}^{10} 3 \times 2^{n-2}$. Tentukan berikut ini.

   a. Suku pertama
   b. Rasio
   c. Rumus suku ke-n
   d. Rumus jumlah n suku pertama

   Penyelesaian:

   Perhatikan bentuk $\sum_{n=3}^{10} 3 \times 2^{n-2}$.

   Untuk $n = 3$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{3-2} = 3 \times 2 = 6$.
   Untuk $n = 4$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{4-2} = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$.
   Untuk $n = 5$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{5-2} = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$.
   ⋮
   dan seterusnya.
   Untuk $n = 10$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{10-2} = 3 \times 2^8 = 3 \times 256 = 768$.
   Oleh karena itu, bentuk panjangnya adalah 6 + 12 + 24 + ... + 768.

   a. Tampak dari bentuk panjangnya bahwa suku pertamanya adalah 6.

   b. Rasio $(r) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{12}{6} = 2$.

   c. Rumus suku ke-n adalah $U_n = ar^{n-1} = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$.

   d. Rumus jumlah n suku pertama adalah $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{6(2^n - 1)}{2 - 1} = 6(2^n - 1)$.

Problem Solving

Diketahui deret geometri 10 + 40 + 160 + ... (sampai dengan 6 suku). Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk deret geometri baru.

a. Hitunglah jumlah deret geometri semula.
b. Hitunglah jumlah deret geometri yang baru.
c. Hitunglah jumlah suku-suku yang disisipkan.

Penyelesaian:

Suku pertama deret geometri yang diberikan adalah $a = 10$, rasionya $r = \frac{40}{10} = 4$, dan banyaknya suku $n = 6$.

a. Jumlah deret geometri semula adalah

$$S_6 = \frac{10(4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{10(4.096 - 1)}{3} = 13.650.$$

b. Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk deret geometri baru dengan $r' = \sqrt[1+1]{r} = \sqrt{4} = 2$ dan $n' = n + (n - 1)k = 6 + (6 - 1)1 = 11$.

Berarti, jumlah deret geometri yang baru adalah

$$S_{11} = \frac{10(2^{11} - 1)}{2 - 1} = 10(2.048 - 1) = 20.470.$$

c. Jumlah suku-suku yang disisipkan
= jumlah deret geometri yang baru – jumlah deret geometri semula
= 20.470 – 13.650 = 6.850

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri berikut.
   a. $1 + 4 + 16 + \ldots$
   b. $2 - 6 + 18 - \ldots$
   c. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$
   d. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \ldots$
   e. $20 + 10 + 5 + \ldots$
   f. $-8 + 4 - 2 + \ldots$
2. Dalam satu deret geometri diketahui suku ke-9 dan suku ke-4 masing-masing adalah 128 dan –4. Tentukan suku ke-12 dan jumlah 10 suku pertama deret tersebut.
3. Dalam suatu deret geometri diketahui suku pertama dan suku ke-3 masing-masing adalah 64 dan 16. Tentukan suku ke-15 dan jumlah 15 suku pertama deret tersebut.
4. Bilangan $k - 2$, $k - 6$, dan $2k + 3$ membentuk deret geometri. Tentukan jumlah n suku pertama deret tersebut jika $U_1 = k - 2$.

5. Diketahui deret geometri $1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+....$ Di antara dua suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk deret geometri baru.Tentukan suku ke-8 dan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri yang baru.
6. Diketahui deret geometri 2 + 16 + 128 + ... (sampai dengan 10 suku). Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan dua suku sehingga terbentuk deret geometri baru.
   a. Hitunglah jumlah deret geometri semula.
   b. Hitunglah jumlah deret geometri yang baru.
   c. Hitunglah jumlah suku-suku yang disisipkan.

C. Deret Khusus dan Deret Geometri Tak Berhingga

Kalian telah mempelajari rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan deret geometri. Sekarang, kita akan mempelajari rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertama dari deret-deret khusus yang mungkin bukan merupakan deret aritmetika maupun deret geometri.

1. Deret Bilangan Asli

Himpunan bilangan asli adalah {1, 2, 3, ...} sehingga deret bilangan asli adalah 1 + 2 + 3 + ... Dengan demikian, jumlah n bilangan asli pertama dapat dinyatakan dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{n} k$.

Dengan memerhatikan pola suku-sukunya, dapat kita ketahui bahwa deret bilangan asli merupakan deret aritmetika, dengan suku pertama $a = 1$ dan beda $b = 1$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Dalam suatu deret bilangan asli, berlaku
> - suku ke-n adalah $U_n = n$;
> - jumlah n suku pertama adalah
>
> $$S_n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ atau } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Tugas
Inovasi

Kerjakan di buku tugas
Perhatikan rumus jumlah n suku deret geometri. Tunjukkan bahwa jumlah deret bilangan asli adalah
$S_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Contoh:

Pada deret bilangan asli, tentukan
a. Suku ke-5 dan suku ke-40.
b. Jumlah 5 suku pertama dan jumlah 40 suku pertama.

Penyelesaian:

a. Suku ke-5 adalah 5 dan suku ke-40 adalah 40.

b. Jumlah 5 suku pertama adalah $S_5 = \frac{1}{2} \times 5(1 + 5) = \frac{1}{2} \times 30 = 15$, sedangkan jumlah 40 suku pertama adalah $S_{40} = \frac{1}{2} \times 40(1 + 40) = \frac{1}{2} \times 1.640 = 820$.

2. Deret Kuadrat Bilangan Asli

Himpunan kuadrat bilangan asli adalah $\{1^2, 2^2, 3^2, ...\}$ sehingga deret kuadrat bilangan asli adalah $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...$ Dengan demikian, jumlah n kuadrat bilangan asli pertama dapat dinyatakan dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$S_1 = 1^2 = 1$
$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$
$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
$\vdots$

dan seterusnya.
Tampak bahwa

$$S_1 = 1 = \frac{1}{6}(1)(1 + 1)(2\,(1) + 1))$$

$$S_2 = 5 = \frac{1}{6}(2)(2 + 1)(2\,(2) + 1))$$

$$S_3 = 14 = \frac{1}{6}(3)(3 + 1)(2\,(3) + 1))$$

$$S_4 = 30 = \frac{1}{6}(4)(4 + 1)(2\,(4) + 1))$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

Dengan memerhatikan pola suku-suku dari deret n kuadrat bilangan asli di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Dalam suatu deret kuadrat bilangan asli, berlaku
- rumus suku ke-n adalah $U_n = n^2$;
- jumlah n suku pertama adalah

$$S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \text{ atau } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Contoh:

Pada deret kuadrat bilangan asli, tentukan

a. suku ke-10 dan suku ke-45;

b. jumlah 10 suku pertama dan 45 suku pertama.

Penyelesaian:

a. Suku ke-10 adalah $U_{10} = 10^2 = 100$ dan suku ke-45 adalah $U_{45} = 45^2 = 2.025$.

b. Jumlah 10 suku pertama adalah $S_{10} = \frac{1}{6} \times 10(10 + 1)(2 \times 10 + 1) = 385$.

Jumlah 45 suku pertama adalah $S_{45} = \frac{1}{6} \times 45(45 + 1)(2 \times 45 + 1) = 31.395$.

3. Deret Kubik Bilangan Asli

Himpunan kubik (pangkat tiga) bilangan asli adalah $\{1^3, 2^3, 3^3, ...\}$ sehingga deret kubik bilangan asli adalah $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...$ Dengan demikian, jumlah n kubik bilangan asli pertama dapat dinyatakan dalam notasi sigma $\sum_{k=1}^{n} k^3$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$S_1 = 1^3 = 1$

$S_2 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$

$S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$

$\vdots$

dan seterusnya.

Tampak bahwa

$$S_1 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

$$S_2 = 9 = \left(\frac{2(2+1)}{2}\right)^2$$

$$S_3 = 36 = \left(\frac{3(3+1)}{2}\right)^2$$

$$S_4 = 100 = \left(\frac{4(4+1)}{2}\right)^2$$

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Dengan memerhatikan suku-suku deret n kubik bilangan asli di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Dalam suatu deret kubik bilangan asli, berlaku
- rumus suku ke-n adalah $U_n = n^3$;
- jumlah n suku pertama adalah

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ atau } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Contoh:

Pada deret kubik bilangan asli, tentukan
a. suku ke-6 dan suku ke-30;
b. jumlah 6 suku pertama dan 30 suku pertama.

Penyelesaian:

a. Suku ke-6 adalah $U_6 = 6^3 = 216$ dan suku ke-30 = $U_{30} = 30^3 = 27.000$

b. Jumlah 6 suku pertama adalah $S_6 = \left(\frac{6(6 + 1)}{2}\right)^2 = 21^2 = 441$.

Jumlah 30 suku pertama adalah $S_{30} = \left(\frac{30(30 + 1)}{2}\right)^2 = 465^2 = 216.225$.

4. Deret Geometri Tak Berhingga

Pada awal pembahasan bab ini, telah dijelaskan bahwa berdasarkan banyaknya suku, suatu barisan dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu barisan berhingga dan barisan tak berhingga. Perhatikan barisan-barisan geometri berikut.

a. 1, 2, 4, 8, ...
b. 27, 9, 3, 1, ...
c. 5, –25, 125, –625, ...
d. –216, 72, –24, 8, ...

Barisan-barisan di atas merupakan contoh barisan tak hingga. Perhatikan barisan a dan c pada contoh di atas. Misalkan suku ke-n barisan itu adalah U_n. Makin besar nilai n pada barisan tersebut, harga mutlak suku-suku barisan a dan c makin besar. Barisan seperti itu dinamakan *barisan divergen*. Adapun barisan b dan d berlaku sebaliknya, makin besar nilai n, harga mutlak suku-sukunya makin kecil. Barisan seperti itu dinamakan *barisan konvergen*. Dengan kata lain, pengertian kedua barisan itu dapat ditulis sebagai berikut.

Misalkan r adalah rasio suatu barisan geometri tak berhingga, barisan itu disebut
a. barisan divergen jika $|r| > 1$, artinya $r < -1$ atau $r > 1$;
b. barisan konvergen jika $|r| < 1$, artinya $-1 < r < 1$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Deret geometri tak hingga $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$, ... konvergen untuk

a. $-1 < x < 1$
b. $0 < x < 2$
c. $x > 2$
d. $x < 2$
e. semua x

Soal SKALU, 1978

Apabila suku-suku barisan yang konvergen dijumlahkan, diperoleh deret yang konvergen. Pada deret konvergen, jumlah suku-sukunya tidak akan melebihi suatu harga tertentu, tetapi terus-menerus mendekati harga tersebut. Harga tertentu ini disebut *jumlah tak berhingga suku* yang dinotasikan dengan S_∞. Harga S_∞ merupakan harga pendekatan (limit) jumlah semua suku (S_n), untuk n mendekati tak berhingga.

Dengan memperhatikan kenyataan bahwa untuk $-1 < r < 1$ jika dipangkatkan bilangan yang sangat besar maka hasilnya mendekati 0.

Misalnya $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} \to 0, \left(\frac{1}{10}\right)^{1.000} = \frac{1}{10^{1.000}} \to 0$, dan seterusnya.

Oleh karena itu,

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{.....................} \quad \text{(dibaca: limit } S_n \text{ untuk } n \text{ mendekati tak berhingga)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{......} \quad \text{(karena deret konvergen maka } |r| < 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a-ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} \quad \text{.....................} \quad \left(\text{karena } \lim_{n\to\infty} ar^n = 0\right)$$

Dengan demikian, rumus jumlah tak berhingga suku dari deret geometri yang konvergen adalah

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Contoh:

1. Tentukan jumlah tak berhingga suku dari deret berikut.

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

b. $10^{2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots}$

Penyelesaian:

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Dari deret tersebut, diketahui $a = 1$ dan $r = \frac{1}{2}$ sehingga

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

b. $10^{2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots}$

Perhatikan deret $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$.

Dari deret tersebut, diperoleh $a = 2$ dan $r = \frac{1}{2}$.

Dengan demikian, $S_\infty = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

Jadi, $10^{2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots} = 10^4 = 10.000$.

2. Diketahui suku ke-n dari deret geometri adalah $U_n = \frac{3}{2^n}$. Tentukan:
   a. suku pertama;
   b. rasio;
   c. jumlah tak berhingga suku.

Penyelesaian:

a. Suku pertama adalah $U_1 = \frac{3}{2^1} = \frac{3}{2}$.

b. Suku ke-2 adalah $U_2 = \frac{3}{4}$ sehingga $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$.

c. Jumlah tak berhingga suku adalah

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Problem Solving

Tentukan nilai x agar deret $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \ldots$ konvergen.

Penyelesaian:

Rasio deret tersebut adalah $r = x - 1$. Syarat deret konvergen adalah $|r| < 1$ sehingga

$|r| < 1$

$\Leftrightarrow |x-1| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1$

$\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Jadi, agar deret tersebut konvergen, nilai x terletak pada interval $0 < x < 2$.

Tugas Inovasi **Kerjakan di buku tugas**

Perhatikan deret geometri tak hingga yang konvergen $a + ar + ar^2 + ...$

a. Buktikan bahwa jumlah suku-suku pada kedudukan ganjil (S_{ganjil}) adalah $S_{ganjil} = \dfrac{a}{1+r^2}$.

b. Buktikan bahwa jumlah suku-suku pada kedudukan genap (S_{genap}) adalah $S_{genap} = \dfrac{ar}{1-r^2}$.

c. Buktikan bahwa $S_{genap} : S_{ganjil} = r$.

Kegiatan **Kerjakan di buku tugas**

Tujuan:

Menentukan jumlah suku-suku pada kedudukan nomor ganjil dan pada kedudukan nomor genap dari deret geometri tak berhingga $\dfrac{15}{100} + \dfrac{15}{10.000} + \dfrac{15}{1.000.000} + ...$

Permasalahan:

Bagaimana rumus jumlah suku-suku pada kedudukan nomor ganjil dan pada kedudukan nomor genap dari deret geometri tak berhingga tersebut?

Langkah-Langkah:

1. Pisahkan deret suku-suku pada kedudukan nomor ganjil dan pada kedudukan nomor genap.
2. Dari masing-masing deret tersebut, tentukan suku pertama dan rasionya.
3. Dengan rumus deret geometri tak berhingga tentukan jumlah dua deret tersebut.

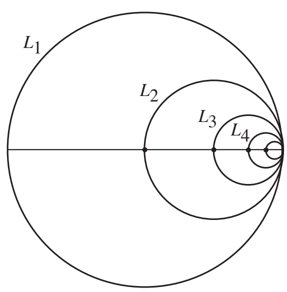
Kesimpulan:

Jumlah suku-suku pada kedudukan nomor ganjil adalah $\dfrac{1.500}{9.999}$, sedangkan jumlah suku-suku pada kedudukan nomor genap adalah $\dfrac{15}{9.999}$.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

1. Pada deret bilangan asli, tentukan berikut ini.
   a. Suku ke-15 dan ke-60
   b. Jumlah 15 suku pertama dan jumlah 60 suku pertama
2. Pada deret kuadrat bilangan asli, tentukan berikut ini.
   a. Suku ke-20 dan suku ke-35
   b. Jumlah 20 suku pertama dan 35 suku pertama.
3. Pada deret kubik bilangan asli, tentukan berikut ini.
   a. Suku ke-8 dan suku ke-40
   b. Jumlah 8 suku pertama dan 40 suku pertama.
4. Tentukan jumlah tak berhingga dari deret berikut.
   a. $2 + \sqrt{2} + 1 + ...$
   c. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + ...$
   b. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$
   d. $\pm 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \pm ...$
5. Diketahui suku ke-n dari deret geometri adalah $\frac{5}{2^n}$. Tentukan:
   a. suku pertama;
   c. jumlah tak berhingga suku.
   b. rasio;
6. Tentukan jumlah deret geometri tak berhingga jika diketahui suku pertama dan ke-3 masing-masing adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{0{,}125}$.
7. Tentukan nilai dari
   a. $3^{8+4+2+1+...}$
   b. $3^{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^4+\left(\frac{1}{x}\right)^6+\left(\frac{1}{x}\right)^8+\,...}$
   c. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{...}}}}$ (**Petunjuk** : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = ((2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{8}}$
8. Diketahui suatu deret geometri konvergen dengan suku pertama a dan jumlah seluruh suku-sukunya 2. Tentukan batas-batas a yang mungkin.
9. Tentukan batas-batas nilai x agar barisan geometri $3, 3(1 - x), 3(1 - x)^2, ...$ konvergen. (**Petunjuk**: barisan geometri konvergen jika $-1 < r < 1$)
10. Perhatikan gambar lingkaran di samping.
    Luas $L_1 = a$ cm^2.
    Jika diameter $L_2 = \frac{1}{2}$ diameter L_1, diameter $L_3 = \frac{1}{2}$ diameter L_2, diamater $L_4 = \frac{1}{2}$ diameter L_3, dan seterusnya, tentukan jumlah luas seluruh lingkaran $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ + ... dalam a.



Gambar 3.1

D. Penggunaan Barisan dan Deret

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak persoalan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan kaidah barisan maupun deret, misalnya perhitungan bunga bank, perhitungan kenaikan produksi, dan laba suatu usaha. Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, terlebih dahulu kita tentukan apakah masalah tersebut merupakan barisan aritmetika, barisan geometri, deret aritmetika, atau deret geometri. Kemudian, kita selesaikan dengan rumus-rumus yang berlaku untuk memperoleh jawaban dari persoalan yang dimaksud.

Contoh:

1. Suatu perusahaan sepatu mulai berproduksi pada awal tahun 1987, dengan jumlah produksi 10.000 pasang sepatu. Ternyata, setiap tahun produksinya berkurang 500 pasang sepatu. Pada tahun keberapa perusahaan tersebut tidak mampu berproduksi lagi?

   Penyelesaian:

   Produksi tahun pertama adalah 10.000 pasang sepatu, produksi tahun ke-2 adalah 9.500 pasang sepatu, tahun ke-3 adalah 9.000 pasang sepatu, dan seterusnya. Dari sini terlihat bahwa dari tahun ke tahun produksi sepatu perusahaan itu membentuk barisan aritmetika 10.000, 9.500, 9.000, ..., dengan a = 10.000 dan b = –500.

   Perusahaan tidak memproduksi lagi, berarti $U_n = 0$ sehingga

   $$\begin{aligned} U_n = 0 &\Leftrightarrow a + (n-1)b = 0 \\ &\Leftrightarrow 10.000 + (n-1)(-500) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10.000 - 500n + 500 = 0 \\ &\Leftrightarrow 500n = 10.500 \\ &\Leftrightarrow n = 21 \end{aligned}$$

   Jadi, perusahaan tersebut tidak mampu lagi berproduksi pada tahun ke-21 atau tahun 2008.

2. Pada awal bulan Juni 2006, Yunita menyumbang Rp10.000,00 ke dalam sebuah kotak dana kemanusiaan. Sebulan kemudian, Yunita mengajak 10 orang temannya untuk menyumbang Rp10.000,00 ke dalam kota tersebut. Bulan berikutnya, setiap orang dari 10 orang yang diajak Yunita mengajak 10 orang lainnya untuk menyumbang Rp10.000,00 ke dalam kotak yang sama. Demikian seterusnya. Jika setiap orang hanya sekali menyumbang Rp10.000,00 ke dalam kotak dana kemanusiaan dan Yunita adalah orang pertama yang menyumbangkan dana ke dalam kotak itu, tentukan jumlah uang yang terkumpul hingga akhir bulan Maret 2007.

   Penyelesaian:

   - Uang yang terkumpul pada bulan Juni 2006 Rp10.000,00.
   - Uang yang terkumpul hingga bulan Juli Rp10.000,00 + 10(Rp10.000,00).
   - Uang yang terkumpul pada bulan Agustus Rp10.000,00 + 10(Rp10.000,00) + 10(10(10.000,00)).

- Uang yang terkumpul pada bulan September Rp10.000,00 + 10(Rp10.000,00) + 10(10(Rp10.000,00)) + 10(10(10(Rp10.000,00))).
- Dan seterusnya hingga Maret 2007.

Jumlah uang yang terkumpul setiap bulan dianggap sebagai jumlah bilangan berikut.
10.000 + 10(10.000) + 10(10(10.000,00)) + 10(10(10(10.000))) + ...

$$=10.000\,(\underbrace{1 + 10 + 100 + 1.000 + ...}_{\text{deret geometri}})$$

Jumlah tersebut mengikuti pola deret geometri dengan suku pertama 1 dan rasio 10.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

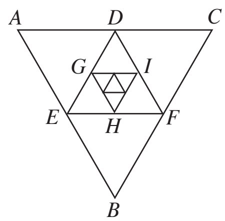
$$S_{10} = \frac{1(10^{10} - 1)}{10 - 1} = 1.111.111.111$$

Dengan demikian, jumlah uang yang terkumpul hingga bulan Maret 2007 adalah Rp10.000,00 × S_{10} = Rp10.000,00 × 1.111.111.111 = Rp11.111.111.110.000,00.

Uji Kompetensi 9

Kerjakan di buku tugas

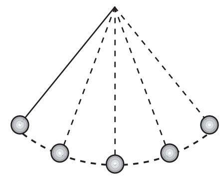
1. Suatu perusahaan sepatu mulai berproduksi pada tahun 1990 dengan jumlah produksi 5.000 pasang sepatu. Ternyata, setiap tahun produksinya bertambah 100 pasang sepatu. Pada tahun keberapa perusahaan tersebut mampu memproduksi 100.000 pasang sepatu?
2. Selama 5 tahun berturut-turut jumlah penduduk di Kota *A* membentuk deret geometri. Pada tahun terakhir, jumlah penduduknya 4 juta jiwa, sedangkan jumlah penduduk tahun pertama dan ke-3 adalah 1,25 juta jiwa. Tentukan jumlah penduduk Kota *A* pada tahun ke-4.
3. Perhatikan gambar segitiga sama sisi di samping. Panjang sisi segitiga itu adalah a. Di dalam segitiga itu dibuat segitiga sama sisi dengan titik sudut terletak di tengah-tengah sisi segitiga semula. Hal ini diulang terus-menerus. Tentukan jumlah ruas seluruh segitiga yang terbentuk. (Pada gambar di samping, jumlah ruas seluruh segitiga yang dimaksud adalah luas $\Delta\, ABC$ + luas $\Delta\, DEF$ + luas $\Delta\, GHI$ + ...)



Gambar 3.2

4. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 10 meter. Setiap kali sesudah bola terjatuh ke lantai, bola itu terpantul kembali hingga mencapai ketinggian $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukan panjang seluruh lintasan bola tersebut hingga berhenti. (Ingat: panjang lintasan meliputi lintasan naik dan lintasan turun)

5. Jarak melintang secara berurutan yang dilalui sebuah bandul adalah 36 cm, 24 cm, 16 cm, ...
   Tentukan total jarak yang dilalui bandul itu sebelum berhenti.



Gambar 3.3

E. Deret dalam Hitung Keuangan (Pengayaan)

Dalam hitung keuangan, deret sangat sering digunakan untuk penyelesaian kasus-kasus yang berhubungan dengan permodalan, bunga, dan pertumbuhan uang.

Pada pembahasan kali ini, kita akan membahas bunga tunggal, bunga majemuk, dan anuitas.

1. Bunga Tunggal

Dalam melakukan usaha, seseorang tentu menginginkan pertumbuhan dari modal usahanya. Misalkan modal yang digunakan dalam usaha sebesar Rp1.000.000,00. Setelah menjalankan usahanya, ternyata modalnya tumbuh dan menjadi Rp2.000.000,00. Selisih antara hasil usaha dan modal ini dinamakan *bunga*. Namun, pengertian bunga tidak sesempit itu. Misalkan seseorang meminjam uang sebesar Rp1.000.000,00 dan pada waktu tertentu harus mengembalikannya sebesar Rp1.450.000,00. Selisih antara jumlah uang yang dikembalikan dan jumlah uang yang dipinjam ini juga dapat dinamakan *bunga*.

Bunga juga dapat dinyatakan dalam persentase. Besarnya bunga bergantung pada *besar modal* yang dipinjam dan *tingkat suku bunganya*.

Bunga yang dibayarkan peminjam pada akhir periode peminjaman (tertentu), dengan besar peminjaman dijadikan dasar perhitungan dan bunga pada periode berikutnya selalu tetap, dinamakan *bunga tunggal*.

Misalkan diketahui uang sebesar Rp200.000,00 dibungakan atas dasar bunga tunggal dengan tingkat suku bunga 10%.

- Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan pertama adalah Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  = Rp200.000,00 (1 + 10%).
- Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan kedua adalah Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  + 10% × Rp200.000,00 = Rp200.000,00 (1 + 2 × 10%).
- Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan ketiga adalah Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  + 10% × Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  = Rp200.000,00 (1 + 3 × 10%)

Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan ke-t adalah Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00 + ... + 10% × Rp200.000,00 = Rp200.000,00 (1 + t × 10%).

Misalkan modal sebesar M_0 dibungakan atas dasar bunga tunggal selama t periode waktu dengan tingkat suku bunga (persentase) r. Bunga (B) dan besar modal pada akhir periode (M_t) adalah

$$B = M_0 \times t \times r$$
$$M_t = M_0 (1 + t \times r)$$

Contoh:

Suatu bank perkreditan memberikan pinjaman kepada nasabahnya atas dasar bunga tunggal sebesar 3% per bulan. Jika seorang nasabah meminjam modal sebesar Rp6.000.000,00 dengan jangka waktu pengembalian 2 tahun, tentukan

a. besar bunga setiap bulannya;
b. besar uang yang harus dikembalikan sesuai jangka waktu yang ditentukan.

Penyelesaian:

Diketahui r = 3%, M_0 Rp6.000.000,00, dan t = 24 bulan.

a. Besar bunga setiap bulan adalah

$$\begin{aligned} B &= M_0 \times t \times r \\ &= \text{Rp}6.000.000{,}00 \times 1 \times 3\% \\ &= \text{Rp}180.000{,}00 \end{aligned}$$

b. Besar uang yang harus dikembalikan sesuai jangka 24 bulan adalah

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 (1 + t \times r) \\ M_{24} &= \text{Rp}6.000.000{,}00\ (1 + 24 \times 3\%) \\ &= \text{Rp}6.000.000{,}00\ (1{,}72) \\ &= \text{Rp}10.320.000{,}00 \end{aligned}$$

Dari contoh di atas, tentu kalian dapat menyatakan bahwa perhitungan bunga tunggal berhubungan erat dengan deret aritmetika. Coba jelaskan alasanmu, mengapa demikian?

Problem Solving

Herman meminjam uang di Bank Jaya Bersama sebesar Rp4.000.000,00 dengan suku bunga tunggal 20% per tahun. Dalam waktu 90 hari, Herman sudah harus mengembalikan uang tersebut. Berapa bunga dan jumlah uang yang harus dikembalikannya? (Anggap 1 tahun 360 hari)

Penyelesaian:

Dari soal di atas diketahui M_0 = Rp4.000.000,00,

r = 20% per tahun, dan t = 90 hari = $\frac{1}{4}$ tahun.

a. Bunga: $B = M_0 \times t \times r$

$$= \text{Rp}4.000.000{,}00 \times \frac{1}{4} \times 20\%$$

$$= \text{Rp}200.000{,}00$$

b. Jumlah uang yang harus dikembalikan adalah

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 (1 + t \times r) \\ &= M_0 + M_0 \times t \times r \\ &= M_0 + B \\ &= \text{Rp}4.000.000{,}00 + \text{Rp}200.000{,}00 \\ &= \text{Rp}4.200.000{,}00 \end{aligned}$$

2. Bunga Majemuk

Tugas

Berpikir Kritis

Kerjakan di buku tugas

Coba kalian cari tahu dapat dipakai untuk masalah apa saja rumus bunga majemuk,

a. jika $i > 0$;

b. jika $i < 0$?

Pada pembahasan di depan, kalian telah mengetahui perhitungan bunga yang didasarkan atas bunga tunggal. Sekarang kita akan memahami bunga majemuk, yaitu bunga yang dihitung atas dasar jumlah modal yang digunakan ditambah dengan akumulasi bunga yang sebelumnya. Bunga ini disebut bunga berbunga. Perhitungan bunga berbunga semacam ini dapat kalian pahami melalui perhitungan deret geometri.

Misalkan modal sebesar M_0 dibungakan atas dasar bunga majemuk, dengan tingkat suku bunga i (dalam persentase) per periode waktu. Besar modal pada periode ke-t (M_t) dapat dihitung dengan cara berikut.

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + M_0 \times i = M_0 (1 + i) \\ M_2 &= M_1 (1 + i) = [M_0 (1 + i)] (1 + i) = M_0 (1 + i)^2 \\ M_3 &= M_2(1 + i) = [(M_0 (1 + i)^2] (1 + i) = M_0 (1 + i)^3 \\ &\vdots \\ M_t &= M_{t-1}(1 + i) = [M_0 (1 + i)^{t-1}](1 + i) = M_0(1 + i)^t \end{aligned}$$

Jadi, dapat kita katakan sebagai berikut.

Jika modal sebesar M_0 dibungakan atas dasar bunga majemuk dengan tingkat suku bunga i (dalam persen) per periode tertentu, besar modal pada periode ke-t (M_t) dapat ditentukan dengan rumus

$$M_t = M_0 (1 + i)^t$$

Contoh:

Suatu bank memberi pinjaman kepada nasabahnya atas dasar bunga majemuk 18% per tahun. Jika seorang nasabah meminjam modal sebesar Rp10.000.000,00 dan bank itu membungakan secara majemuk per bulan, berapakah modal yang harus dikembalikan setelah 2 tahun?

Penyelesaian:

Dari soal diketahui M_0 = Rp10.000.000,00, $i = \dfrac{18\%}{12}$ = 1,5%, dan t = 24 bulan.

Dengan demikian, modal yang harus dikembalikan setelah 2 tahun (24 bulan) adalah

$$\begin{aligned} M_t &= M_0\,(1 + i)^t \\ M_{24} &= \text{Rp}10.000.000{,}00\,(1 + 0{,}015)^{24} \\ &= \text{Rp}10.000.000{,}00\,(1{,}4295028) \\ &= \text{Rp}14.295.028{,}12 \end{aligned}$$

3. Anuitas

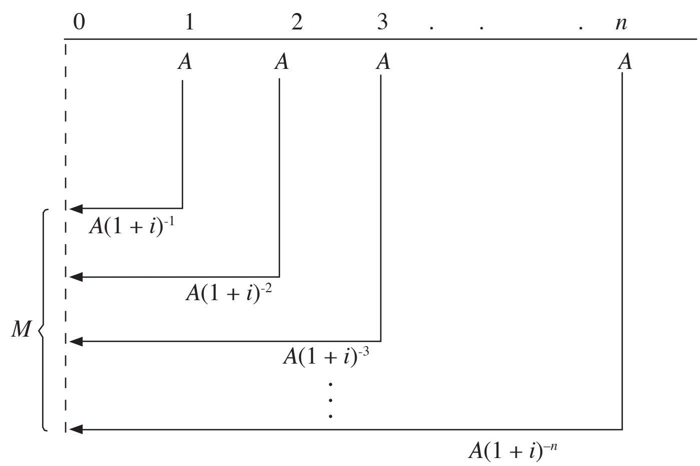
Kasus utang piutang penyelesaiannya dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu cara pembayarannya dapat dilakukan dengan anuitas di samping dengan cara-cara pembayaran yang telah kalian pelajari sebelumnya (dengan bunga). Pembayaran yang dilakukan dengan anuitas akan makin kecil karena bunga yang dibayarkan juga makin kecil. Hal ini berakibat pokok pinjaman juga makin kecil. Jadi, anuitas merupakan cara pembayaran maupun penerimaan yang secara urut dalam jumlah tetap dengan jangka waktu juga tetap.

Ada dua macam anuitas, yaitu anuitas pasti dan anuitas tidak pasti. Anuitas pasti mempunyai ciri khas tanggal mulai dan tanggal selesai tepat. Misalnya pembayaran utang. Pada anuitas tidak pasti, jangka pembayarannya disesuaikan keadaan. Misalnya, santunan asuransi kecelakaan. Pada kali ini, kita hanya akan membicarakan anuitas pasti.

Misalnya modal sebesar M dipinjamkan dengan pembayaran n kali anuitas. Jika suku bunga yang diberikan i (dalam persen) dan besar anuitas A, besar anuitas dapat ditentukan dengan cara berikut.

$$A = \frac{M}{\sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k}}$$

Perhatikan ilustrasi di samping.



Dari ilustrasi di atas dapat dijelaskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} M &= A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \ldots + A(1+i)^{-n} \\ &= A[((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n}] \\ &= A\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \end{aligned}$$

Bentuk terakhir merupakan deret geometri dengan suku awal

$a = \dfrac{1}{1+i}$ dan rasio $r = \dfrac{1}{1+i}$.

Oleh karena itu,

$$M = A\left[\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right] = A\left[\frac{\frac{1}{1+i}\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)}{1-\frac{1}{1+i}}\right] = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right],$$

sehingga $A = \dfrac{Mi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = Mi\dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.

Jadi, besar anuitas dapat juga ditentukan dengan rumus

$$A = \frac{Mi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Contoh:

Pak Dani meminjam uang sebesar Rp10.000.000,00 pada suatu bank. Pelunasan dilakukan dengan cara anuitas sebanyak 10 kali. Anuitas pertama dilakukan sebulan setelah uang pinjaman diterima. Tentukan besar anuitasnya jika suku bunga yang ditetapkan bank 15% per tahun.

Penyelesaian :

Dari soal diketahui bahwa

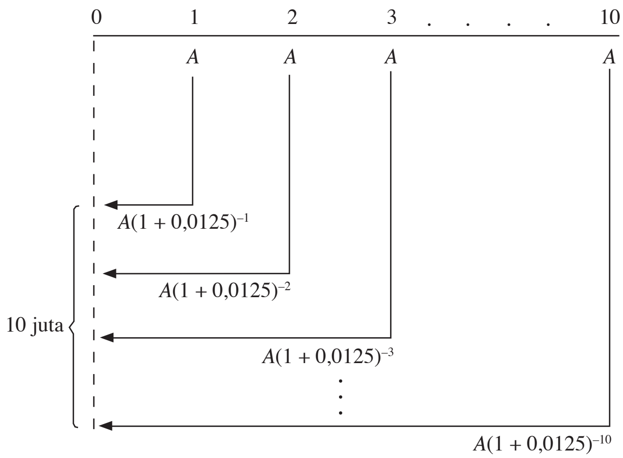
M = Rp10.000.000,00

i = 15% per tahun

$= \dfrac{15\%}{12}$

= 1,25% per bulan

n = 10



Dengan menggunakan rumus anuitas, diperoleh

$$A = \frac{Mi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{10.000.000(0{,}0125)(1+0{,}0125)^{10}}{(1+0{,}0125)^{10} - 1}$$

$$= \frac{125.000(1.0125)^{10}}{(1{,}0125)^{10} - 1} = \frac{125.000(1{,}13227083)}{0{,}13227083} = 1.070.030{,}74$$

Jadi, anuitasnya sebesar Rp1.070.030,74. Artinya, Pak Dani setiap bulan harus membayar ke bank sebesar Rp1.070.030,74 selama 10 bulan (sebanyak 10 kali).

Problem Solving

Suatu pinjaman sebesar Rp20.000.000,00 harus dilunasi dengan 10 anuitas akhir tahunan. Jika suku bunga yang ditetapkan 5%, tentukan besar anuitas.

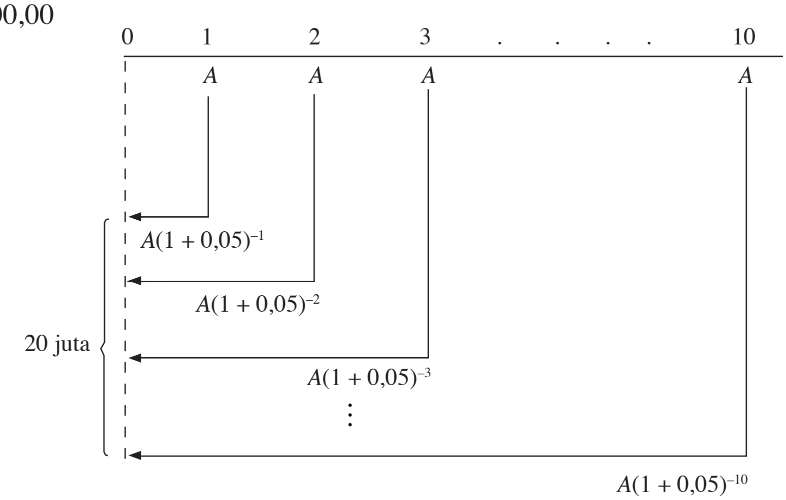
Penyelesaian:

Pada soal diketahui

M = Rp20.000.000,00

i = 5% = 0,05

n = 10



Dengan menggunakan rumus anuitas, diperoleh

$$A = \frac{M}{\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}}$$

$$= \frac{\text{Rp}20.000.000{,}00}{\sum_{k=1}^{10}(1+0{,}05)^{-k}}$$

$$\text{Nilai } \frac{1}{\sum_{k=1}^{10}(1+0,05)^{-k}} = 0,12950457 \text{ (diperoleh dari tabel)}$$

Dengan demikian, besar anuitas adalah

A = Rp20.000.000,00 × 0,12950457 = Rp2.590.091,40

Jadi, besarnya anuitas adalah Rp2.590.091,40. Artinya, peminjam setiap tahun harus membayar sebesar Rp2.590.091,40 selama 10 tahun (sebanyak 10 kali).

Lebih lanjut lagi, kalian dapat menyajikan tabel rencana angsuran yang berkaitan dengan anuitas ini. Adapun bentuknya adalah sebagai berikut.

Misalkan sisa pinjaman pada saat i adalah H_i, i = 1 sampai dengan n dan besar angsuran a_i, untuk i = 1 sampai n.

Tabel Rencana Angsuran

Akhir Periode	Sisa Pinjaman	Anuitas	Beban Bunga di Akhir Periode	Besar Angsuran
1	$H_1 = M$	A	iH_1	$a_1 = A - iH_1$
2	$H_2 = H_1 - a_1$	A	iH_2	$a_2 = A - iH_2$
3	$H_3 = H_2 - a_2$	A	iH_3	$a_3 = A - iH_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$H_n = H_{n-1} - a_{n-1}$	A	iH_n	$a_n = A - iH_n$

Jika dijabarkan lebih lanjut, besarnya angsuran tiap periode adalah

$a_1 = (A - iM)$

$a_2 = (A - iM)(1 + i)$

$a_3 = (a - iM)(1 + i)^2$

⋮

$a_n = (a - iM)(1 + i)^{n-1}$ dan $H_n = 0$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Misalkan sebuah pinjaman sebesar Rp1.000.000,00 dilunasi dengan anuitas. Pinjaman itu akan dilunasi dengan 5 kali anuitas. Anuitas pertama dibayarkan sesudah 1 periode dengan suku bunga 15% per periode. Dari informasi ini, tentukan:

a. besar anuitas;
b. tabel rencana angsuran.

Penyelesaian:

a. Diketahui, $M = 1.000.000$
$n = 5$
$i = 15\%$

$$A = Mi\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$= 1.000.000 \times 0,15 \times \frac{(1+0,15)^5}{(1+0,15)^5 - 1}$$

= 1.000.000 x 0,29831555
= 298.315,55

Jadi, besar anuitas Rp298.315,55.

b. Tabel rencana angsuran

Akhir Periode	Sisa Pinjaman	Anuitas	Beban Bunga di Akhir Periode	Besar Angsuran
1	Rp1.000.000,00	Rp298.315,55	Rp150.000,00	Rp148.315,55
2	Rp851.684,45	Rp298.315,55	Rp127.752,67	Rp170.562,88
3	Rp681.121,57	Rp298.315,55	Rp102.168,24	Rp196.147,31
4	Rp484.974,26	Rp298.315,55	Rp72.746,14	Rp225.569,41
5	Rp259.404,85	Rp298.315,55	Rp38.910,73	Rp259.404,85

Uji Kompetensi 10

Kerjakan di buku tugas

1. Pak Tohir meminjam uang sebesar Rp2.000.000,00 pada Koperasi Jaya. Koperasi menetapkan suku bunga tunggal 3% per bulan. Berapa jumlah uang yang harus dia kembalikan jika jangka pengembaliannya 1 tahun?
2. Bu Dani meminjam uang di Bank Lancar sebesar Rp15.000.000,00. Dalam satu bulan uang tersebut harus dikembalikan dengan jumlah Rp15.750.000,00. Tentukan:
   a. tingkat (suku) bunga tunggal;
   b. berapa jumlah uang yang harus dikembalikan Bu Dani jika dia meminjam selama satu tahun?
3. Bu Yanti menyimpan uang di suatu bank yang memberikan bunga majemuk dengan tingkat suku bunga 4% per tahun. Berapa jumlah uang Bu Yanti pada akhir tahun ke-6?
4. Pada setiap awal bulan, seorang anak menabung sebesar Rp25.000,00 di suatu bank. Setiap bulan ia mendapatkan bunga majemuk sebesar 8%. Pada akhir bulan ke-12, semua uangnya diambil. Berapakah jumlah uang yang diambilnya?

5. Nova menabung uangnya di bank Rp1.000.000,00 setiap tahun. Bank tersebut memberikan bunga dengan sistem bunga majemuk sebesar 12% per tahun. Berapakah jumlah uangnya setelah ditabung selama 25 tahun?
6. Suatu bank memberikan bunga 12% untuk tabungan dan menerima bunga dari pinjaman sebesar 15% per tahun dengan sistem bunga majemuk. Tentukan keuntungan bank itu dalam 15 tahun untuk setiap Rp10.000,00.
7. Pak Wayan meminjamkan uang Rp2.000.000,00 kepada seorang peminjam dengan perjanjian bunga majemuk. Jika suku bunga yang diberikan Pak Wayan 5,2% per tahun, tentukan uang yang harus dikembalikan peminjam selama jangka peminjaman 8 bulan.
8. Suatu modal sebesar Rp12.000.000,00 dipinjamkan dengan suku bunga 2,5% per bulan. Modal itu harus dilunasi dalam 10 anuitas. Anuitas pertama dilakukan sebulan setelah uang diterima peminjam. Tentukan besarnya anuitas. Buatlah tabel rencana angsuran.
9. Sebuah dealer sepeda motor mengkreditkan sebuah motor seharga Rp17.000.000,00 kepada Tuan Indra. Sepeda ini harus dilunasi dalam 24 anuitas bulanan. Jika suku bunga yang diberikan pihak dealer 3%, tentukan besar anuitasnya.
10. Sebuah pinjaman Rp1.000.000,00 akan dilunasi dengan anuitas. Besar anuitas Rp200.000,00 tiap akhir bulan.
    a. Sesudah berapa lama pinjaman akan lunas?
    b. Buatlah tabel rencana angsurannya.

Refleksi

Coba perhatikan kembali barisan dan deret yang telah kalian pelajari. Kemudian, bandingkan dengan deret hitung keuangan. Kesimpulan apakah yang kalian peroleh dengan adanya hubungan antara deret dan ilmu hitung keuangan? Manfaat apa yang kalian peroleh setelah mempelajari materi ini?

Rangkuman

1. Rumus umum barisan aritmetika baku adalah
   $U_n = a + (n - 1)b$, dengan U_n = suku ke-n, a = suku pertama, b = beda, dan n = nomor suku.
2. Jumlah n suku suatu deret aritmetika adalah
   $$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b) \text{ atau } S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n).$$
3. Rumus umum suku ke-n barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$, dengan U_n = suku ke-n, a = suku pertama, r = rasio, dan n = nomor suku.
4. Rumus umum jumlah n suku pertama deret geometri adalah
   $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ untuk } r < 1 \text{ atau } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ untuk } r > 1.$$

Latihan Ulangan Harian III

Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Diketahui barisan bilangan 5, 6, 9, 14, 21, ...
   Jumlah seluruh barisan itu dapat dinyatakan dengan ....
   a. $\sum_{k=1}^{n} (k+5)$
   b. $\sum_{k=1}^{n} (2k+5)$
   c. $\sum_{k=0}^{n} (k^2+5)$
   d. $\sum_{k=1}^{n} (k+5)^2$
   e. $\sum_{k=1}^{n} (k^2+5)$
2. Diketahui suku ke-n suatu barisan adalah $U_n = n^2 - 8n$. Jika suku terakhir 20, banyaknya suku barisan itu adalah ....
   a. 7 d. 15
   b. 10 e. 17
   c. 12
3. Diketahui suku kedua suatu barisan adalah –3 dan suku kelimanya adalah 3. Jika suku ke-n barisan itu dirumuskan $U_n = an + b$, suku ke-15 adalah ....
   a. 25 d. 20
   b. 24 e. 15
   c. 23
4. Diketahui suatu barisan aritmetika dengan beda 3. Jika $U_{10} = 31$ maka U_{21} = ...
   a. 34 d. 64
   b. 44 e. 45
   c. 54
5. Jika U_{11} dan U_{41} dari suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 38 dan 128 maka U_{51} = ...
   a. 148
   b. 15
   c. 160
   d. 164
   e. 195
6. Di antara dua suku yang berurutan pada barisan 3, 18, 33, ... disisipkan 4 buah bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika yang baru. Jumlah 7 suku pertama barisan aritmetika yang terbentuk adalah ....
   a. 78 d. 87
   b. 81 e. 91
   c. 84
7. Dari suatu deret aritmetika, diketahui $U_6 + U_9 + U_{12} + U_{15} = 20$. Jumlah 20 suku pertama deret tersebut adalah ....
   a. 50
   b. 80
   c. 100
   d. 230
   e. 200
8. Diketahui suku terakhir dari barisan aritmetika adalah 47, sedangkan jumlah keseluruhan suku-sukunya adalah 285. Jika suku pertama barisan itu –9, banyak suku barisan itu adalah ....
   a. 10 d. 20
   b. 12 e. 23
   c. 15
9. Jika barisan geometri dengan $U_1 = A$ dan $U_{11} = B$ maka U_6 = ...
   a. $A\sqrt{AB}$ d. $\frac{AB}{2}$
   b. $A\sqrt{\frac{A}{B}}$ e. $B\sqrt{\frac{A}{B}}$
   c. $A\sqrt{A}$
10. Diketahui $a + 1, a - 2, a + 3$ membentuk barisan geometri. Agar ketiga suku ini membentuk barisan aritmetika, suku ketiga harus ditambah dengan ....
    a. 8 d. –6
    b. 6 e. –8
    c. 5

11. Diketahui *a*, *b*, dan *c* membentuk deret geometri dengan jumlah 26. Jika suku tengah ditambah 4, akan membentuk deret aritmetika. Jumlah 10 suku pertama dari deret aritmetika yang terbentuk adalah ....
    a. 260 d. 380
    b. 286 e. 364
    c. 340
12. Jumlah penduduk suatu wilayah setiap 8 tahun bertambah 100%. Jika pada awal tahun 2006 jumlah penduduk mencapai 4.800.000 orang, pada awal tahun 1974 sudah mencapai ... orang.
    a. 150.000
    b. 200.000
    c. 300.000
    d. 400.000
    e. 600.000
13. Pada tahun pertama seorang karyawan mendapat gaji Rp300.000,00 per bulan. Jika setiap tahun gaji pokoknya dinaikkan sebesar Rp25.000,00 maka jumlah gaji pokok karyawan itu selama 10 tahun adalah .... *(UAN SMK 2003)*
    a. Rp37.125.000,00
    b. Rp38.700.000,00
    c. Rp39.000.000,00
    d. Rp41.125.000,00
    e. Rp49.500.000,00
14. Suku ke-3 dan ke-5 suatu barisan geometri berturut-turut adalah 8 dan 32. Suku ke-7 barisan itu adalah ....
    a. 64 d. 240
    b. 120 e. 256
    c. 128
15. Di suatu daerah pemukiman baru tingkat pertumbuhan penduduk adalah 10% per tahun. Kenaikan jumlah penduduk dalam waktu 4 tahun adalah .... *(UMPTN 1998)*
    a. 40,0%
    b. 42,0%
    c. 43,8%
    d. 46,4%
    e. 61,6%
16. Seorang karyawan menabung dengan teratur setiap bulan. Uang yang ditabung setiap bulan selalu lebih besar dari bulan sebelumnya dengan selisih yang sama. Apabila jumlah seluruh tabungannya dalam 12 bulan pertama adalah 192 ribu rupiah dan dalam 20 bulan pertama adalah 48 ribu rupiah maka besar uang yang ditabung pada bulan kesepuluh adalah .... *(UMPTN 1998)*
    a. 47 ribu rupiah d. $\frac{177}{8}$ ribu rupiah
    b. 28 ribu rupiah e. $\frac{23}{2}$ ribu rupiah
    c. 23 ribu rupiah
17. Dari sebuah deret aritmetika diketahui bahwa jumlah 4 suku pertama, $S_4 = 17$ dan jumlah 8 suku pertama, $S_8 = 58$. Suku pertamanya adalah ....
    a. 1 d. 4
    b. 2 e. 5
    c. 3
18. Semua bilangan genap positif dikelompokkan seperti berikut
    (2), (4, 6), (8, 10, 12), (14, 16, 18, 20), ...
    Bilangan yang terdapat di tengah pada kelompok ke-15 adalah ....
    a. 170 d. 258
    b. 198 e. 290
    c. 226
19. Jumlah bilangan-bilangan bulat antara 250 dan 1.000 yang habis dibagi 7 adalah ....
    a. 45.692 d. 73.775
    b. 54.396 e. 80.129
    c. 66.661
20. Seorang pemilik kebun memetik jeruk dan mencatatnya setiap hari. Ternyata banyak jeruk yang dipetik pada hari ke-n memenuhi rumus $U_n = 80 + 20n$. Banyak jeruk yang dipetik selama 18 hari pertama adalah ....
    a. 4.840 buah
    b. 4.850 buah
    c. 4.860 buah
    d. 4.870 buah
    e. 4.880 buah

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan tepat.

1. Tiga buah bilangan membentuk deret aritmetika dengan jumlah 36 dan hasil kalinya 1.536. Tentukan bilangan terbesarnya.
2. Banyaknya suku suatu deret aritmetika adalah 15, suku terakhir adalah 47 dan jumlah deret tersebut sama dengan 285. Tentukan suku pertama deret ini.
3. Persamaan $2x^2 + x + k = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Jika x_1, x_2, $\frac{x_1 x_2}{2}$ membentuk suatu deret geometri, tentukan suku ke-4 deret geometri tersebut.
4. Tentukan batas nilai suku pertama a dari suatu deret geometri tak berhingga agar deret tersebut konvergen dengan jumlah 2.
5. Sejak suatu perusahaan berdiri mempunyai jumlah karyawan tertentu. Seiring dengan meningkatnya permintaan produk perusahaan tersebut, pihak perusahaan mengimbangi dengan menambah jumlah karyawan. Jumlah karyawan tiap tahunnya menjadi satu setengah kali tahun sebelumnya. Setelah tahun keempat jumlah karyawan mencapai 135 orang. Berapakah jumlah karyawan pada tahun pertama?
6. Seorang ibu membagi buah semangka kepada 3 orang anaknya dengan cara sebagai berikut.
   a. Ibu itu membagi semangka tersebut menjadi 4, masing-masing anaknya diminta mengambil seperempat bagian.
   b. Seperempat bagian sisanya dibagi lagi menjadi 4, masing-masing anaknya diminta kembali mengambil seperempat bagian.

   Demikian seterusnya. Cara itu diulang-ulang terus-menerus. Tunjukkan bahwa masing-masing anak mendapat sepertiga bagian dari buah semangka tersebut.

Latihan Ujian Nasional

Kerjakan di buku tugas

Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 6x - k = 0$ adalah x_1 dan x_2. Jika $x_1^2 - x_2^2 = 15$, nilai $k = ...$
   a. 10
   b. 8
   c. 6
   d. –8
   e. –10
2. Agar persamaan kuadrat $x^2 + ax + a = 0$ mempunyai akar-akar yang sama, nilai a yang memenuhi adalah ....
   a. $a = 0$ atau $a = 4$
   b. $0 \leq a \leq 4$
   c. $a < 0$ atau $a > 4$
   d. $0 < a < 4$
   e. $0 < a < 1$
3. Pertidaksamaan $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ mempunyai penyelesaian ....
   a. $x \leq -2$ atau $x \geq 4$
   b. $x \leq 2$ atau $x \geq 4$
   c. $-2 \leq x \leq 4$
   d. $x \leq 4$ atau $x \geq 2$
   e. $-4 \leq x \leq 2$
4. Jika $a = {}^7\log 2$ dan $b = {}^2\log 3$ maka ${}^6\log 98$ adalah ....
   a. $\dfrac{2+a}{a(b+1)}$
   b. $\dfrac{1+a}{(1+b)a}$
   c. $2a + b$
   d. $\dfrac{1}{a}(1+2b)$
   e. $\dfrac{1}{b}(a+2)$
5. Perhatikan sistem persamaan linear berikut.
   $4x + y + 3z = 10$
   $6x - 5y - 2z = 2$
   $5x + 3y + 7z = 13$
   Nilai $x + y + z = ...$
   a. 7
   b. 5
   c. 3
   d. 2
   e. 0
6. Agar garis $y = mx + 8$ menyinggung persamaan parabola $y = x^2 - 8x + 12$, nilai m adalah ....
   a. 4 atau 12
   b. –4 atau 12
   c. 4 atau –12
   d. –4 atau –12
   e. 6 atau –12
7. Sebuah kotak berisi 10 buah bola yang terdiri atas 2 bola berwarna putih, 5 bola berwarna merah, dan 3 bola berwarna biru. Pada pengambilan 3 buah bola sekaligus dari kotak tersebut, peluang terambil 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna biru adalah ....
   a. $\dfrac{1}{2}$
   b. $\dfrac{1}{4}$
   c. $\dfrac{1}{6}$
   d. $\dfrac{1}{8}$
   e. $\dfrac{2}{3}$
8. Suatu pertemuan dihadiri oleh 7 orang yang duduk di suatu tempat dengan susunan melingkar. Banyaknya susunan cara duduk dari ketujuh orang tersebut adalah ....
   a. 5.040
   b. 720
   c. 120
   d. 60
   e. 24
9. Suatu data memiliki pola $2n$, dengan n bilangan asli. Jika mean dari $\sum_{n=1}^{10} 2n = A$, nilai mean dari suatu data baru dengan pola $\sum_{n=1}^{10} (2n+1)$ adalah ....
   a. A
   b. $2A$
   c. $A + 1$
   d. $2A + 1$
   e. $A + 10$

10. Perhatikan tabel berikut ini.

Nilai Ujian	Frekuensi
3	3
4	5
5	12
6	17
7	14
8	6
9	3

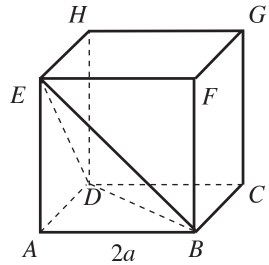
Seorang siswa dinyatakan lulus ujian jika nilai ujiannya lebih tinggi dari nilai rata-rata dikurangi 1. Dari data di atas, jumlah siswa yang lulus adalah ....
a. 52
b. 40
c. 38
d. 23
e. 20

11. Tinggi badan dari sekelompok siswa disajikan dalam tabel berikut.

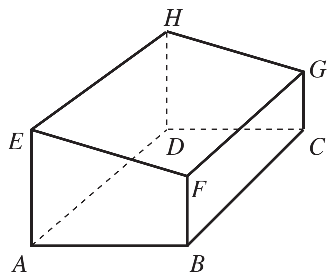
Tinggi (cm)	Frekuensi
140–144	6
145–149	6
150–154	10
155–159	6
160–164	5

Nilai mean dari data di atas adalah ....
a. 141,5
b. 151,7
c. 154
d. 155,2
e. 160,2

12. Bentuk sederhana dari $\dfrac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$ = ...
a. $3+2\sqrt{3}$
b. $3-2\sqrt{3}$
c. $2+2\sqrt{3}$
d. $2-\sqrt{3}$
e. $2+\sqrt{3}$

13.


Pada gambar kubus di atas, jarak antara titik A dan bidang EBD adalah ....
a. $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$
b. $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$
c. $\frac{4}{3}a\sqrt{3}$
d. $\frac{1}{6}a\sqrt{3}$
e. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$

14. Perhatikan gambar berikut.


Pada gambar prisma segi empat di atas, pasangan-pasangan rusuk berikut yang merupakan pasangan rusuk bersilangan adalah ....
a. *EF* dengan *AB* dan *AD* dengan *BF*
b. *AB* dengan *BF* dan *BC* dengan *EA*
c. *GH* dengan *DC* dan *EF* dengan *AB*
d. *AB* dengan *DH* dan *BF* dengan *DC*
e. *FG* dengan *AD* dan *EF* dengan *HG*

15. Tiga buah bilangan membentuk deret aritmetika, dengan jumlah 30. Jika suku ke-2 dikurangi 2 membentuk deret geometri, suku ke-5 deret geometri yang terbentuk adalah ....
a. 54
b. 58
c. 64
d. 66
e. 69

16. Jumlah seratus bilangan asli ganjil pertama adalah ....
    a. 200
    b. 1.500
    c. 10.000
    d. 15.000
    e. 15.430

17. Jumlah deret tak berhingga
    $$5p - \frac{15}{4}p^2 + \frac{45}{16}p^3 - \frac{135}{64}p^4 + ...$$
    sama dengan 4. Nilai p adalah ....
    a. 4
    b. 2
    c. 1
    d. $\frac{1}{2}$
    e. $\frac{1}{4}$

18. Jumlah deret geometri tak berhingga $6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + ...$ sama dengan ....
    a. 18
    b. 9
    c. $\frac{9}{2}$
    d. $\frac{9}{3}$
    e. $\frac{9}{4}$

19. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu 28 dan hasil kalinya 512. Ketiga bilangan itu adalah ....
    a. 5, 9, dan 16
    b. 4, 8, dan 16
    c. 2, 6, dan 20
    d. 3, 8, dan 17
    e. 5, 10, dan 18

20. Jumlah 15 suku pertama dari deret 5 + 10 + 15 + ... adalah ....
    a. 400
    b. 500
    c. 600
    d. 800
    e. 1.000

21. Akar-akar persamaan $x^2 - bx + 15 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Jika x_1, x_2, dan 7 membentuk barisan aritmetika, nilai b = ...
    a. –8
    b. –4
    c. 4
    d. 5
    e. 8

22. Jumlah 10 suku pertama dari deret 3 + 9 + 27 + ... adalah ....
    a. 88.573
    b. 88.275
    c. 85.873
    d. 82.857
    e. 57.828

23. Negasi dari pernyataan ”Setiap siswa SMA berseragam putih abu-abu” adalah ....
    a. Setiap siswa SMA tidak berseragam putih abu-abu
    b. Tidak ada siswa SMA yang berseragam putih abu-abu
    c. Ada beberapa siswa SMA yang tidak berseragam putih abu-abu
    d. Ada beberapa siswa SMA yang berseragam putih abu-abu
    e. Setiap siswa SMA berseragam bukan putih abu-abu

24. Matriks X yang memenuhi persamaan
    $$X\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 27 & 11 \end{pmatrix}$$ adalah ....
    a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

25. Matriks $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers jika ....
    a. a dan b sembarang
    b. a, b $\neq$ 0 dan $a = b$
    c. $a = 0$ dan b sembarang
    d. a, b, $\neq$ 0 dan $a = -b$
    e. $b = 0$ dan a sembarang

26. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear

$$\begin{cases}(a-b)x+ay=1\\ ax+(a+b)y=1\end{cases}$$

memiliki anggota yang tak berhingga banyaknya jika ....

a. a dan b sembarang
b. $a \neq 0, b \neq 0, a = b$
c. $a \neq 0, b \neq 0$, dan $a = -b$
d. $a = 0$ dan $b \neq 0$
e. $b = 0$ dan $a \neq 0$

27. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear

$$\begin{cases}x-y+z=5\\ -2x+y+z=6\\ 3x-2y+2z=11\end{cases}$$

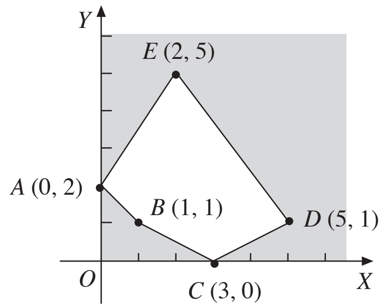
adalah ....

a. {(2, 1, 6)}
b. {(2, 6, 1)}
c. {(1, 6, 2)}
d. {(1, 2, 6)}
e. {(6, 1, 2)}

28. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik-titik (1, 2), (2, 4), dan (3, 8). Persamaan parabola itu adalah ....

a. $y = x^2 + x + 2$
b. $y = x^2 + x - 2$
c. $y = x^2 - x + 2$
d. $y = x^2 - x - 2$
e. $y = -x^2 + x + 2$

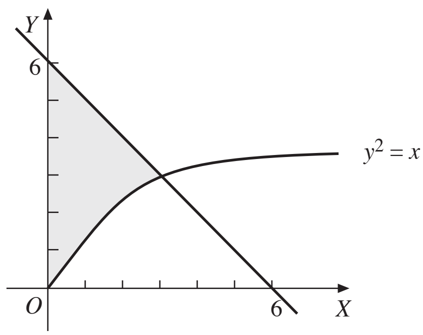
29.



Daerah yang tidak diarsir adalah daerah himpunan penyelesaian permasalahan program linear. Nilai maksimum fungsi objektif $z = 2x + 5y$ pada gambar di samping adalah ....

a. 6
b. 7
c. 10
d. 15
e. 29

30.



Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah ... satuan luas.

a. $4\frac{2}{3}$
b. 8
c. 10
d. $10\frac{2}{3}$
e. $12\frac{2}{3}$

Daftar Pustaka

Anton, Howard dan kolman, Bernard. 1982. *Mathematics with Application for the Management, Life, and Social Sciences, 2nd ed*. New York: Academic Press.

Bartle, Robert G. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Willey and Sons.

Berry, John, etc. 2003. *A-Z Mathematics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Budhi, Wono Setya. 2003. *Model Buku Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas.

Earl, B. 2002. *IGCSE Chemistry*. London: John Murray, Ltd.

Howard, R.D. 1993. *Mathematics in Actions*. London: Nelson Blackie, Ltd.

Isabelle van Welleghem. 2007. *Ensiklopedia Pengetahuan*. Solo: Tiga Serangkai.

Kerami, Djati dkk. 2002. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Koesmartono dkk. 1983. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: Penerbit ITB.

Kreyszig, E. 1988. *Advanced Enginering Mathematics*. New York: John Wiley & Son.

Murray, Spiegel. 1972. *Statistics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Murray, Spiegel. 1981. *Vector Analysis*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Murray, Spiegel. 2000. *Probability and Statistics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Negoro, S.T. dkk. 2007. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Neswan, Oki dan Setya Budi, W. 2003. *Matematika 1–3 untuk SMA*. Bandung: Penerbit ITB.

Pimentall, Ric and Wall, T. 2002. *IGCSE Mathematics*. London: John Murray.

Purcell, Edwin J. 1987. *Calculus with Analitic Geometry*. London: Prentice-Hall International, Inc.

Sembiring, Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.

Siswanto. 1997. *Geometri I*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Sullivan, M. 1999. *Precalculus*. Upper Saddle River: Prentice-Hall.

Susianto, Bambang. 2004. *Olimpiade dengan Proses Berpikir*. Jakarta: Grasindo.

Glosarium

Barisan adalah susunan angka-angka yang memiliki ciri khusus, 95

Barisan aritmetika adalah suatu barisan dengan selisih dari satu suku ke suku berikutnya yang berurutan selalu tetap, 100

Barisan geometri adalah suatu barisan dengan perbandingan dari satu suku terhadap suku berikutnya yang berurutan selalu tetap, 109

Beda adalah selisih tetap antarsuku berurutan dalam barisan aritmetika, 101

Deret aritmetika adalah suatu deret yang diperoleh dengan penjumlahan suku-suku barisan aritmetika, 106

Deret geometri tak berhingga adalah suatu deret geometri (biasanya konvergen) yang mempunyai banyak suku tak hingga, 120

Deret geometri adalah suatu deret yang diperoleh dari penjumlahan suku-suku barisan geometri, 114

Deret konvergen adalah suatu deret yang mempunyai pembanding bernilai antara 0 dan 1, 121

Deret adalah jumlahan suku-suku dari suatu barisan, 95

Fungsi objektif adalah suatu fungsi dalam program linear yang akan dicari nilai maksimum atau nilai minimumnya, 8

Konstrain adalah batasan dari suatu program linear, 9

Matriks identitas adalah matriks persegi dengan elemen-elemen diagonal utama bernilai 1, 48, 53

Matriks nol adalah suatu matriks yang semua elemen-elemennya nol, 38

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai ordo *n* x *n*, 37

Matriks adalah suatu model penyusunan bilangan-bilangan yang membentuk persegi panjang, di mana elemen-elemennya dibatasi tanda kurung, 31, 33

Notasi sigma adalah notasi yang digunakan dalam operasi penjumlahan, 89

Optimasi adalah mengoptimalkan (memaksimumkan atau meminimumkan) suatu permasalahan, 21

Ordo adalah derajat; tingkat; ukuran, 36

Pemodelan matematika adalah proses membentuk sistem pertidaksamaan sebagai kendala (konstrain) dalam program linear, 8

Rasio adalah pembanding yang nilainya selalu tetap antarsuku berurutan dalam barisan geometri, 110

Skalar adalah suatu besaran yang hanya memiliki besar (panjang), 46

Transpose matriks adalah suatu operasi matriks yang menukar elemen-elemen baris menjadi elemen-elemen kolom atau sebaliknya, 36

Indeks Subjek

Kunci Soal-Soal Terpilih

Bab I Program Linear

Uji Kompetensi 2

1. $8x + 5y = 18.500$
   $4x + 6y = 11.000$
5. Menentukan nilai maksimum $z = 3.000x + 5.000y$
   Kendala: $6x + 3y \leq 54$
   $4x + 6y \leq 48$
   $5x + 5y \leq 50$
   $x \geq 0, y \geq 0, x, y \in C$

Uji Kompetensi 3

1. a. 128; $x = 4$ dan $y = 4$
   b. 54; $x = 2$ dan $y = 2$
   c. 28; $x = 0$ dan $y = 14$ atau $x = 6$ dan $y = 2$
5. Rp370.000,00

Bab II Matriks

Uji Kompetensi 4

5. a. $a = 1$, $b = –1$, dan $c = 15$
   b. $a = 2$, $b = 4$, $c = 4$, dan $d = 2$
   c. $a = 2$, $b = –6$, $c = –4$, dan $d = 8$
   d. $a = 4$, $b = 2$, $c = 8$, dan $d = 1$

Uji Kompetensi 5

3. a. $a = 2$ dan $b = –1$
   b. $a = 3$ dan $b = 4$

Uji Kompetensi 7

3. a. $a = 1$
   b. $a = –3$
   d. $a = \frac{8}{3}$

Uji Kompetensi 8

4. $\begin{cases} p + l = 25 \\ 5p - 3l = 45 \end{cases}$
   p = panjang; l = lebar
5. $\begin{cases} x - 4y = 30 \\ 2x + 3y = 140 \end{cases}$
   x = umur ayah (sekarang) = 59,09 tahun
   y = umur anak (sekarang) = 7,27 tahun

Bab III Barisan dan Deret

Uji Kompetensi 3

3. a. –6, 0, 10, 24
   b. $n = 80$
5. a. $U_{30} = 206$
   b. $U_{30} = 151$
   c. $U_{30} = 99$

Uji Kompetensi 4

1. $U_{25} = 125$
3. $U_{100} = 300$
5. 4, 6, 8

Uji Kompetensi 6

1. a. $U_{15} = 32.768$
   c. $U_{15} = 16.384$
   e. $U_{15} = -49.152$
2. 5, 10, 20
7. 189 cm
8. $U_{10} = 512$

Matematika Inovatif

Konsep dan Aplikasinya

Dewasa ini, ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang sangat cepat. Hal itu merupakan rangkaian panjang yang berpangkal dari perkembangan ilmu-ilmu dasar (*basic sciences*), di antaranya matematika. Oleh karena itu, kita perlu menguasai matematika agar dapat memahami perkembangan dunia yang terjadi di sekitarnya dan tetap *survive* di tengah pesatnya kemajuan teknologi dan peradaban dunia.
Buku Matematika Inovatif Konsep dan Aplikasinya ini disusun dengan penyajian yang menekankan pada penalaran dan daya kreatifitas sehingga mampu melahirkan generasi yang kompeten dalam hal-hal berikut.

1. Memahami dan menguasai konsep, operasi, dan relasi matematis.
2. Lancar dalam berprosedur.
3. Mampu merumuskan, menyajikan, dan menyelesaikan problem matematis.
4. Berpikir kritis, logis, melakukan refleksi, serta memberikan alasan yang kuat.
5. Berkarakter produktif.

Sekilas Info Buku

1. Bahasa yang digunakan komunikatif sehingga mudah dipahami.
2. Penyampaian materi cukup representatif, contoh-contoh dan soal-soal uji kompetensi memiliki gradasi naik.
3. Dilengkapi dengan soal-soal latihan ulangan harian dan semester.
4. Pemilihan jenis dan ukuran huruf cukup cermat didukung dengan tata letak dan ilustrasi yang menarik sehingga tidak membosankan untuk dibaca.

Dengan beberapa kelebihan di atas, diharapkan buku ini mampu merangsang minat dan prestasi siswa dalam mempelajari matematika.

ISBN 978-979-068-864-3 (no. jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-869-8

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks palajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp8.319,--